Bidang Fokus/Unggulan : Teknologi Informasi
Fakultas : MIPA

LAPORAN AKHIR

RISET DASAR UNGGULAN UNSRAT (RDUU)

ANGKA PERPOTONGAN PSEUDOLINIER FAMILI TAK HINGGA GRAF REGULER-5

TIM PENGUSUL

Ketua Peneliti
Prof. Dr. Benny Pinontoan, M.Sc - 0004066603

Anggota Peneliti
Jullia Titaley, M.Si - 0018077204
Drs. Jantje D. Prang, M.Si – 0020125801

UNIVERSITAS SAM RATULANGI
NOVEMBER 2018

Dibiayai dari Daftar Isian Pelaksanaan Anggaran (DIPA)
Nomor : SP DIPA – 042.01.2.400959/2018 tanggal 5 Desember 2017
5742.003.053.525119

HALAMAN PENGESAHAN

RISET DASAR UNGGULAN UNSRAT (RDUU)

Judul

Angka Perpotongan Pseudolinier Famili Tak Hingga Graf Reguler-5

Peneliti/Pelaksana

Nama Lengkap	: BENNY PINONTOAN
Perguruan Tinggi	: Universitas Sam Ratulangi
NIP/NIK	: 196606041995121001
NIDN	: 0004066603
Jabatan / Golongan	: Guru Besar - IV/c
Fakultas / Program Studi	: Fakultas Matematika dan ilmu pengetahuan alam - Matematika
Nomor HP	: 082346005599
Alamat surel(e-mail)	: bpinonto@yahoo.com
Tahun Pelaksanaan	: Tahun ke 1 dari rencana 2 Tahun
Biaya Yang Diusulkan	: Rp. 39,000,000
Biaya Maksimum	: Rp. 40,000,000

Anggota

Anggota (1)

Nama	: JULLIA TITALEY
NIDN	: 0018077204
Perguruan Tinggi	: Universitas Sam Ratulangi

Anggota (2)

Nama	: JANTJE DENNY PRANG
NIDN	: 0020125805
Perguruan Tinggi	: Universitas Sam Ratulangi

Mengetahui
Dekan Fakultas Matematika dan ilmu pengetahuan alam,

(Prof.Dr. Benny Pinontoan, M.Sc)
NIP/NIK : 196606041995121001

Manado, 13 November 2018
Ketua,

(PROF.DR. BENNY PINONTOAN, M.SC)
NIP/NIK : 196606041995121001

Menyetujui,
Ketua LPPM UNSRAT

(Prof.Dr.Ir. Charles L. Kaunang, MS)
NIP/NIK : 195910181986031002

RINGKASAN

Graf dapat digambar pada bidang datar, dimana simpul disajikan sebagai titik dan sisi disajikan sebagai garis, kurva atau garis lurus, yang menghubungkan titik-titik yang menjadi ujung-ujungnya. Gambar yang baik dari sebuah graf memiliki sifat-sifat, yaitu: tidak ada sisi yang memotong dirinya sendiri, dua sisi damping tidak boleh saling memotong, dua sisi sembarang tidak boleh saling memotong lebih dari satu kali, dan paling banyak dua sisi berpotongan pada satu titik. Banyaknya perpotongan sisi pada sebuah gambar yang baik disebut jumlah perpotongan. *Angka perpotongan* $cr(G)$ dari sebuah graf adalah jumlah perpotongan terkecil diantara semua gambar yang baik dari graf G (Tutte, 1972). Sebuah graf G adalah planar jika $cr(G) = 0$, dan nonplanar $cr(G) > 0$.

PRAKATA

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan Yang Maha Kuasa atas berkat dan rahmatNya sehingga seluruh rangkaian kegiatan Penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik dan tepat waktu.

Kegiatan Riset Dasar Unggulan Universitas Sam Ratulangi (RDUU) dapat dilaksanakanberkat adanya bantuan dan kerjasama yang sangat baik dari semua pihak yang terlibat. Pada kesempatan ini kami mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada :

1. Universitas Sam Ratulangi yang telah memberikan dana untuk pelaksanaan kegiatan penelitian ini
2. Ketua LPPM Unsrat yang telah memberikan persetujuan untuk melaksanakan kegiatan penelitian ini
3. Tenaga perpustakaan Institut Teknologi Bandung (ITB) yang telah membantu memberikan kesempatan kepada kami saat studi literatur
4. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan namanya satu persatu, yang telah membantu terlaksananya penelitian ini.

Kami menyadari bahwa apa yang telah kami lakukan dan hasilkan selama melaksanakan kegiatan penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kami mengharapkan saran dan kritik yang konstruktif dari semua pihak demi penyempurnaan laporan akhir penelitian ini.

Manado, November 2018

Tim Peneliti

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebuah graf adalah pasangan (V, E) dimana $V \neq \emptyset$ adalah himpunan simpul dan E adalah himpunan sisi. Banyak hal yang dapat dimodelkan dalam graf dimana simpul representasi objek dan sisi representasi hubungan antar objek, misalnya jaringan komputer, basis data, instalasi listrik, jaringan transportasi, dan lain-lain.

Layout sirkuit *Very Large Scale of Integration* (*VLSI*) seperti microprosessor juga dapat dimodelkan dalam bentuk graf (Leighton, 1983), dimana modul-modul atau gerbang-gerbang adalah simpul-simpul dan hubungan antara modaul/gerbang adalah sisi. Dalam hal rangkaian elektronik seperti halnya VLSI, yang menjadi pertimbangan adalah sedapat mungkin menghindari perpotongan, karena perpotongan dapat mengakibatkan hubungan pendek (*short circuit*). Namun, bilamana perpotongan tidak bisa dihindari, maka yang menjadi pertimbangan adalah meminimalkan banyaknya perpotongan.

Graf dapat digambar pada bidang datar, dimana simpul disajikan sebagai titik dan sisi disajikan sebagai garis, kurva atau garis lurus, yang menghubungkan titik-titik yang menjadi ujung-ujungnya. Gambar yang baik dari sebuah graf memiliki sifat-sifat, yaitu: tidak ada sisi yang memotong dirinya sendiri, dua sisi damping tidak boleh saling memotong, dua sisi sembarang tidak boleh saling memotong lebih dari satu kali, dan paling banyak dua sisi berpotongan pada satu titik. Banyaknya perpotongan sisi pada sebuah gambar yang baik disebut jumlah perpotongan. *Angka perpotongan* $cr(G)$ dari sebuah graf adalah jumlah perpotongan terkecil diantara semua gambar yang baik dari graf G (Tutte, 1972). Sebuah graf G adalah planar jika $cr(G) = 0$, dan nonplanar $cr(G) > 0$.

Jika graf digambar pada bidang dengan sisi-sisi digambar sebagai garis-garis lurus, maka gambar tersebut disebut *rectilinier*. *Angka perpotongan rectilinier* $v(G)$ graf G adalah jumlah perpotongan terkecil di antara semua gambar rechtilinier G (Bienstock and Dean, 1993).

Sebuah *garis pseudo* adalah kurva tertutup sederhana pada bidang projeksi $\boldsymbol{P}^2$ yang tidak memutuskan $\boldsymbol{P}^2$. Sebuah *pengaturan garis pseudo* adalah sebuah himpunan garis pseudo dimana setiap pasangan saling memotong tepat satu kali. Sebuah gambar dari graf G disebut *gambar pseudolinier* jika terdapat sebuah pengaturan garis pseudo dimana setiap garis pseudo memiliki tepat satu sisi dari gambar. *Angka perpotongan pseudolinier* $crp(G)$ graf G adalah minimal perpotongan di antara semua gambar peseudolinier dari G (Hernandez-Velez, Leanos, dan Salazar, 2017).

Pinontoan dan Richter (2003) menentukan angka perpotongan sebuah famili tak hingga graf reguler 5 dengan mengidentifikasi graf-graf ini sebagai susunan ubin-ubin. Mohar dan Dvořák (2015) menamakan graf *periodik* adalah yang dibangun dengan merekatkan graf-graf kecil yang sama.

Pada penelitian ini, akan ditentukan angka perpotongan pesudolinier dari famili tak hingga graf reguler 5 yang diperkenalkan Pinontoan dan Richter (2003).

1.2 Perumusan Masalah

Diberikan famili tak hingga graf regular 5 M_n yang diperkenalkan Pinontoan dan Richter (2003). Berapa angka perpotongan pesudolinier dari famili M_n?

1.3 Target Capaian

Target capaian penelitian ini dapat di lihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Rencana Target Capaian

No	**Luaran**	**Target dicapai pada bulan “November 2018”**
1	Publikasi Ilmiah di Jurnal Nasional (ber-ISSN)	Sudah Publikasi
2	Pemakalah dalam Temu Ilmiah Nasional	Terdaftar

BAB 2
TINJAUAN PUSTAKA

Sebuah graf $G = (V, E)$ adalah pasangan himpunan $V \neq \varnothing$ simpul dan himpunan (bisa kosong) E dari sisi-sisi. Jika $e = uv = vu$ adalah sebuah sisi dari graf G maka simpul u dan simpul v masing-masing adalah ujung dari sisi e, dan kedua simpul itu dinamakan saling damping. Tetangga dari v adalah semua simpul yang saling damping dengan v. Dua sisi yang memiliki simpul bersama dalam sebuah graf dinamakan sisi damping. Derajat sebuah simpul v adalah banyaknya sisi yang berujung pada v. Gelung adalah sisi yang memiliki ujung yang sama. Jika $e_1 = uv$ dan $e_2 = uv$ maka, e_1 dan e_2 adalah sisi paralel. Graf dinamakan sederhana jika tanpa gelung dan sisi paralel. Lintasan yang menghubungkan dua simpul u dan v dalam sebuah graf G adalah barisan sisi yang menghubungkan u dan v. Jika untuk setiap pasangan simpul di graf G terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya, maka G disebut graf terkoneksi. Jika untuk setiap pasangan simpul terdapat k lintasan yang disjoin, maka G disebut graf terkoneksi-k. Sebuah graf dikatakan reguler n jika setiap simpul memiliki derajat n. Terminologi dari teori graf pada paper ini, sama dengan terminologi oleh Chartrand dan Lesniak (2000).

Sebuah graf G dapat digambar pada bidang dimana simpul dari G direpresentasikan oleh titik dan sebuah sisi disajikan dalam bentuk kurva atau garis lurus yang menghubungkan titik-titik simpul itu pada bidang. Sebuah graf bisa memiliki beberapa gambar. Gambar yang baik dari sebuah graf memiliki sifat-sifat, yaitu: tidak ada sisi yang memotong dirinya sendiri, dua sisi damping tidak boleh saling memotong, dua sisi tidak boleh saling memotong lebih dari sekali, dan paling banyak dua sisi berpotongan pada satu titik. Dalam sebuah gambar yang baik dari sebuah graf, dua sisi bisa berpotongan atau tidak. Dua sisi pada sebuah gambar sebuah graf bisa berpotongan pada sebuah gambar, tapi bisa tidak berpotongan pada gambar yang lain. Banyaknya perpotongan sisi pada suatu gambar bisa berbeda dengan banyaknya perpotongan pada gambar yang lain dari graf yang sama.

Banyaknya perpotongan sisi pada sebuah gambar yang baik disebut jumlah perpotongan. *Angka perpotongan* $cr(G)$ dari sebuah graf adalah jumlah perpotongan terkecil diantara semua gambar baik dari graf *G*. Masalah angka perpotongan diperkenalkan oleh Tutte (1970). Sebuah graf *G* adalah planar jika $cr(G) = 0$, selain itu disebut nonplanar. Jadi, angka perpotongan sebuah graf adalah unik.

Masalah angka perpotongan merupakan masalah NP-complete {Garey dan Johnson, 1983). Dengan kata lain, menentukan angka perpotongan sebuah graf tidaklah mudah. Biasanya, untuk membuktikan bahwa $cr(G) = k$ dilakukan dengan membuktikan bahwa $cr(G) \geq k$ dan $cr(G) \leq k$. Pembuktian $cr(G) \leq k$ biasanya dilakukan melalui gambar pada bidang, sedangkan untuk membuktikan bahwa $cr(G) \geq k$, dilakukan dengan menunjukkan bahwa memang terdapat *k* pasang sisi yang harus berpotongan.

Beberapa graf dapat disusun dari graf-graf kecil yang identik ditambah dengan graf kecil yang lain. Graf-graf kecil ini diperkenalkan oleh Pinontoan dan Richter (2003) sebagai ubin (*tile*). Sebuah ubin $T = (G, L, R)$ adalah graf *G* dengan dua barisan simpul yang disebut dinding kiri *L* dan dinding kanan *R*. *Angka perpotongan ubin*, $tcr(T)$, adalah minimum jumlah perpotongan di antara semua gambar graf *G* pada persegi $[0, 1] \times [0, 1]$ pada bidang sedemikian rupa sehingga simpul-simpul dari *L* berada pada $\{0\} \times [0, 1]$ dengan urutan menyusut pada koordinat *y* dan simpul-simpul dari *R* berada pada $\{1\} \times [0, 1]$ dengan urutan menyusut pada koordinat *y*. Sebuah ubin bisa dibalik secara vertikal maupun secara horisontal, dan dapat juga dipilin. Dua ubin dikatakan kompatibel jika dinding-dindingnya bersesuaian. Dua ubin yang kompatibel dapat dilekatkan dengan operasi pelekatan.

Dvořák dan Mohar (2015) menamakan graf *periodik* adalah yang dibangun dengan merekatkan graf-graf kecil yang sama. Ini didasarkan pada konstruksi ubin yang diperkenalkan oleh Pinontoan dan Richter (2003). Mohar dan Dvořák menyimpulkan bahwa angka perpotongan graf periodik dapat dihitung (*computable*).

Pada umumnya sisi-sisi dari graf digambar sebagai kurva atau garis lurus. Jika graf digambar pada bidang dimana sisi-sisinya digambar sebagai garis-garis lurus, maka gambar tersebut disebut *rectilinier*. *Angka perpotongan rectilinier* $\nu(G)$ graf *G* adalah angka terkecil diantara semua gambar rectilinier dari *G*

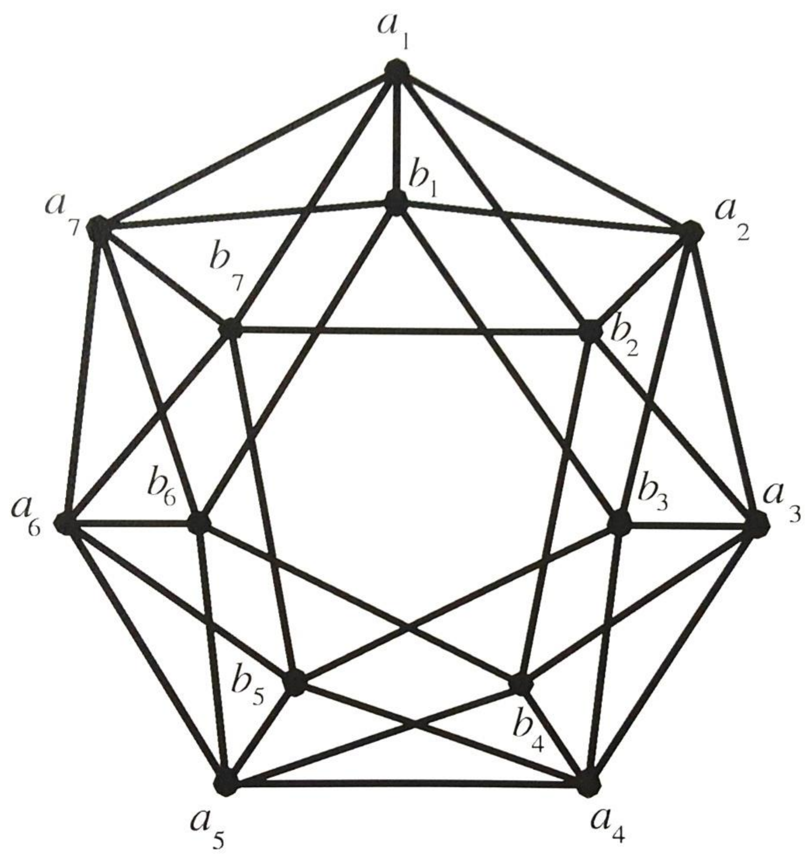
(Bienstock and Dean, 1993). Angka perpotongan rectilinier sebuah graf selalu paling kurang angka perpotongan biasa.

Sebuah *garis pseudo* adalah kurva tertutup sederhana pada bidang projeksi $\boldsymbol{P}^2$ yang tidak memutuskan $\boldsymbol{P}^2$. Sebuah *pengaturan garis pseudo* adalah sebuah himpunan garis pseudo dimana setiap pasangan saling memotong tepat satu kali. Sebuah gambar dari graf G disebut *gambar pseudolinier* jika terdapat sebuah pengaturan garis pseudo dimana setiap garis pseudo memiliki tepat satu sisi dari gambar. *Angka perpotongan pseudolinier* $crp(G)$ graf G adalah minimal perpotongan di antara semua gambar peseudolinier dari G (Hernandez-Velez, Leanos, dan Salazar, 2017).

Angka perpotongan pseudolinier berada di antara angka perpotongan biasa dan angka perpotongan rectlinier (Schaefer, 2018). Dengan kata lain, jika G adalah graf, maka

$$Cr(G) \leq crp(G) \leq \nu(G).$$

Beberapa famili tak hingga graf diperkenalkan. Richter and Thomassen (1993) memperkenalkan famili tak hingga graf B_n reguler 4 dan menghitung $cr(B_n) = 3$. Pinontoan dan Richter (2003) memperkenalkan famili tak hingga M_n reguler 5 dan menghitung $cr(M_n) = 6$. Graf M_7 dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf M_7.

BAB 3
TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan

Diberikan famili tak hingga graf regular 4 B_n diperkenalkan oleh Richter dan Thomassen (1993) dan famili tak hingga graf reguler 5 M_n yang diperkenalkan Pinontoan dan Richter (2003). Maka dalam penelitian ini bertujuan menentukan ketebalan buku dan berapa angka perpotongan buku k-halaman untuk k = 2, 3, 4 untuk pembenaman buku dari B_n dan M_n,

3.2 Manfaat

Dengan ditentukannya ketebalan buku pembenaman dari B_n dan M_n, maka telah dipastikan bahwa untuk family tak hingga graf reguler 4 dan 5 hanya membutuhkan sekian halaman untuk pembenamannya.

Pembenaman buku ini memiliki penerapan pada perancangan layout *Very Large Scale Integrated* (VLSI) seperti microprocessor.

BAB 4
METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan melalui langkah-langkah berikut:

1. Studi literatur yang berkaitan dengan masalah angka perpotongan graf rectilinier dan famili tak hingga graf reguler.
2. Merancang gambar rectilinier famili tak hingga graf reguler-5 M_n.
3. Melakukan konstruksi susunan ubin graf M_n.
4. Menentukan jumlah perpotongan beberapa gambar preudolinier M_n.
5. Memverifikasi dengan deduksi bahwa jumlah perpotongan adalah minimal.
6. Jika diperlukan, simulasi komputer.
    a. Menetapkan spesifikasi fungsional.
    b. Pemrograman menggunakan Kompiler Delphi.
    c. Menetapkan beberapa input graf.
    d. Testing beberapa input graf.
    e. Iterasi sampai tercapai kesesuaian dengan verifikasi deduksi.

Alat dan Bahan

1. Komputer
2. Kompiler Delphi.

Waktu dan Tempat

1. Waktu pelaksanaan adalah tahun 2018.
2. Tempat pelaksanaan di Institut Teknologi Bandung atau Universitas Udayana untuk studi literatur dan sisanya di Manado.

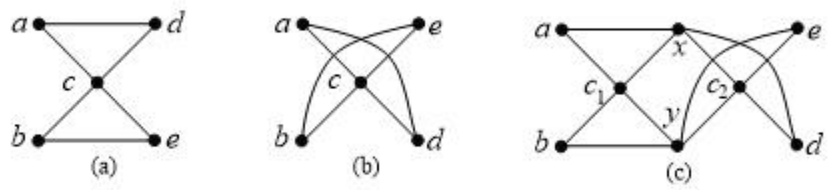
BAB 5

HASIL DAN LUARAN YANG DICAPAI

Dalam Bab ini, akan didefinisikan kembali famili tak-hingga graf periodik plus reguler 4 H_n ($n \geq 3$) dan graf M_n ($n \geq 3$) famili tak-hingga graf periodik plus reguler 5. Kemudian kita akan menentukan pembenaman buku dari H_n ($n \geq 3$) dan M_n ($n \geq 3$).

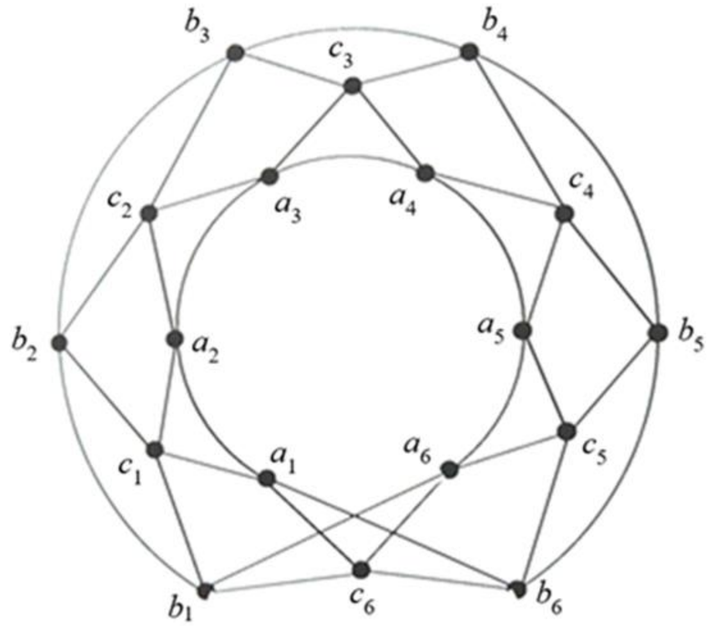
5.1 Famili tak-hingga Graf Periodik Plus Reguler 4.

Richter dan Thomassen [7] memperkenalkan famili tak hingga graf H_n ($n \geq 3$) reguler 4 yang diperoleh dari siklus C_{2m} denhgan panjang $2m$ dengan menambahkan, untuk setiap dua sisi e dan e' pada C_{2m}, sebuah simpul baru yang menghubungkan keempat ujung dari e dan e'. Simpul-simpul dari H_n adalah a_1, a_2, a_3, ..., a_{n+1}, b_1, b_2, b_3, ..., b_{n+1}, c_1, c_2, c_3, ..., dan c_{n+1}. Sisi-sisi H_1 adalah a_kc_k, b_kc_k ($1 \leq k \leq n + 1$), a_ka_{k+1}, b_kb_{k+1}, c_ka_{k+1}, c_kb_{k+1} ($1 \leq k \leq n$), a_1b_{n+1}, a_1c_{n+1}, b_1a_{n+1}, dan b_1c_{n+1}.



Gambar 2. Ubin *H*, *H'*, dan *HH'*.

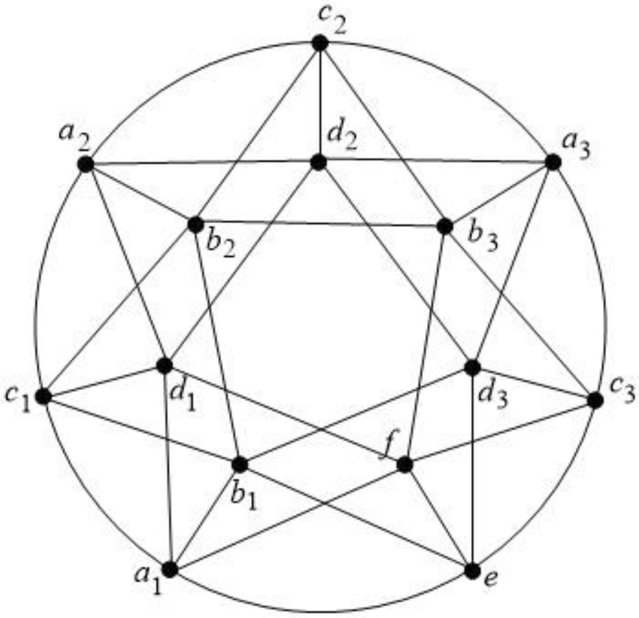
Pinontoan dan Richter [6] mengidentifikasikan bahwa H_n adalah graf yang merupakan pelekatkan n ubin-ubin H in Gambar 2(a) dan sebuah ubin H' pada Gambar 2(b) yang merupakan ubin yang diputar dari ubin H dan isomorfis dengan H, secara siklus. Gambar 3 menunjukkan B_5.



Gambar 3. Graf H_5.

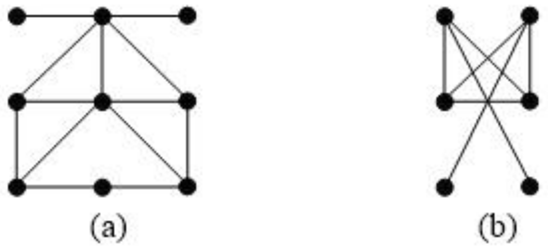
5.2 Famili tak-hingga Graf Periodik Plus Reguler 5.

Biarkan $n \geq 3$. Graf M_n adalah graf reguler 5 yang terdiri dari $4n + 2$ simpul a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, ..., a_n, b_n, c_n, d_n, e, dan f, serta memiliki siklus $a_1\, c_1\, a_2\, c_2 \ldots a_n\, c_n\, e$, dan sisi-sisi a_kb_k, c_kd_k, a_kd_k, b_kc_k $(1 \leq k \leq n)$, sisi-sisi c_kb_{k+1}, d_ka_{k+1}, b_kb_{k+1}, d_kd_{k+1} $(1 \leq k \leq n - 1)$, serta sisi-sisi eb_1, ef, $d_n e$, $b_n f$, $c_n f$, fa_1, fd_1, dan d_nb_1. Gambar 4 menunjukkan M_3.



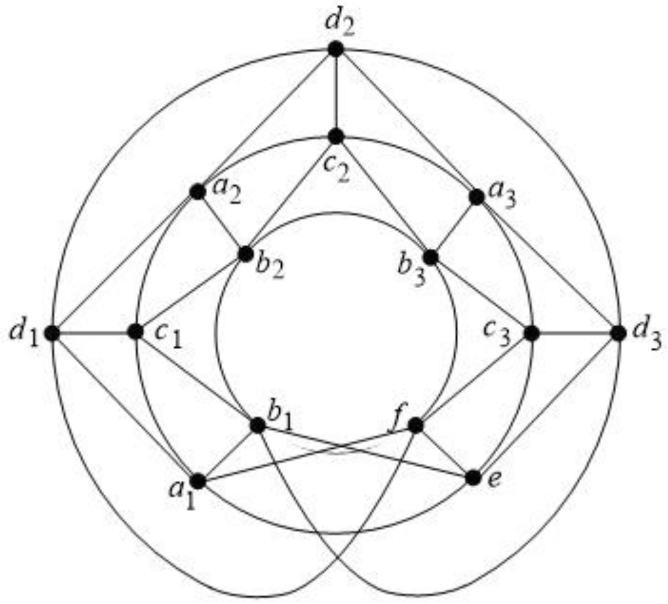
Gambar 4. Graf M_3.

Graf M_n ($n \geq 3$) dapat diperoleh dengan melekkatkan n ubin planar yang identik M seperti pada Gambar 5(a) dan satu ubin S pada Gambar 5(b) yang merupakan graf bagian dari M, secara siklus, dan kemudian mengontrak simpul-simpul derajat dua.



Gambar 5. Ubin M dan ubin S.

Gambar 6 menunjukkan M_3, yang diperoleh dengan melekkatkan tiga ubin M pada Gambar 5(a) dan satu ubin S pada Gambar 5(b) secara siklus.



Gambar 6. Graf M_3.

5.3 Pembenaman Buku H_n dan M_n

Kita akan membuktikan bahwa $\rho(H_n) = 3$ dan $\rho(M_n) = 3$, untuk $n \geq 3$.

Teorema 1. Biarkan $n \geq 3$. Maka $\rho(H_n) = 3$.

Bukti. Richter dan Thomassen [7] menetapkan angka perpotongan H_n ($n \geq 3$) adalah 3, yang juga dikonfirmasi oleh Pinontoan dan Richter [6] dengan menggunakan mekanisme ubin. Jadi M_n tidak planar pada bidang (two pages), dan membutuhkan lebih dari dua halaman untuk pembenaman buku. Dengan kata lain, $\rho(H_n) \geq 3$.

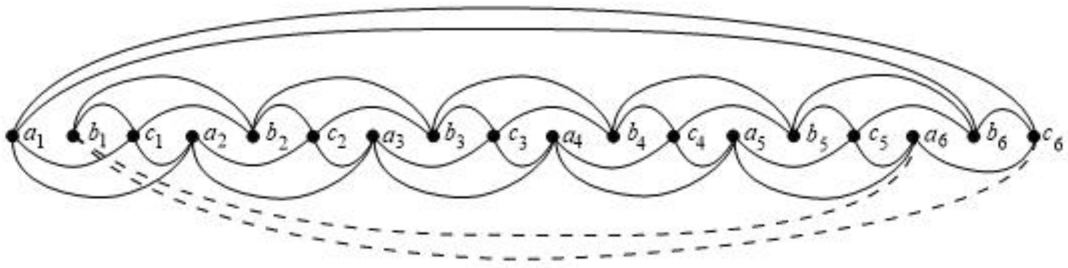
Akan ditunjukkan bahwa $\rho(H_n) \leq 3$ dengan menggambar pembenaman H_n pada buku. Graf H_n dibenamkan pada buku sebagai berikut. Letakkan sisi-sisi dengan urutan sebagai berikut:

$$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots, a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}.$$

Kemudian letakkan sisi-sisi b_ic_i ($1 \leq i \leq n + 1$), b_ib_{i+1} ($1 \leq i \leq n$), c_ib_{i+1} ($1 \leq i \leq n$), dan a_1b_{n+1} serta a_1c_{n+1} tanpa perpotongan pada halaman satu. Pada halaman dua, letakkan sisi-sisi a_ic_i ($1 \leq i \leq n + 1$), a_ia_{i+1} ($1 \leq i \leq n$), dan c_ia_{i+1} ($1 \leq i \leq n$)

tanpa perpotongan. Pada halaman tiga, letakkan sisi-sisi b_1a_{n+1} dan b_1c_{n+1} tanpa perpotongan. Sehingga dibutuhkan tiga halaman untuk pembenaman H_n, jadi $\rho(H_n) \leq 3$. Dengan demikian $\rho(H_n) = 3$. □

Pembenaman H_5 dapat dilihat pada Gambar 7. Simpul-simpul diletakkan pada punggung. Sisi-sisi di atas simpul adalah pada halaman satu, sedangkan sisi-sisi yang digambar garis bersambung di bawah simpul adalah pada halaman dua, sedangkan sisi-sisi yang digambar dengan garis putus-putus di bawah simpul adalah pada halaman tiga.



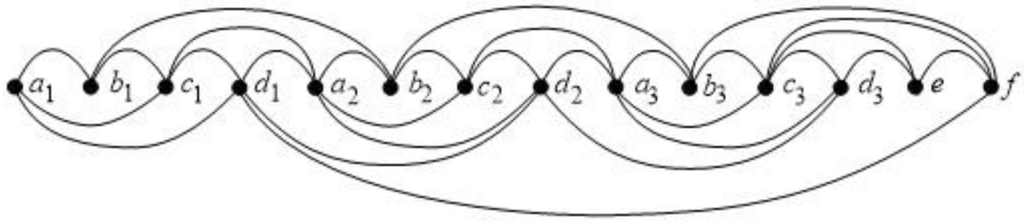
Gambar 7. Sebuah pembenaman H_5.

Teorema 2. Biarkan $n \geq 3$. Maka $\rho(M_n) = 3$.

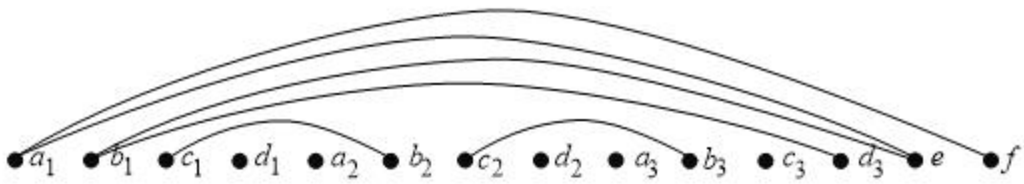
Bukti. Pinontoan dan Richter [6] telah menghitung angka perpotongan graf M_n ($n \geq 3$) yaitu 6. jadi M_n tidak planar sehingga itu membutuhkan tiga halaman untuk pembenaman buku. Dengan kata lain, $\rho(M_n) \geq 3$.

Untuk membuktikan bahwa $\rho(M_n) \leq 3$, akan ditunjukkan gambar pembenaman buku M_n pada tiga halaman. Letakkan simpul-simpul M_n pada punggung dengan urutan sebagai berikut a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, ... , a_n, b_n, c_n, d_n, e, dan f. Kemudian, letakkan sisi-sisi berikut pada halaman satu: $a_k\, b_k$, $b_k\, c_k$, $c_k\, d_k$ ($1 \leq i \leq n$), $b_k\, b_{k+1}$ ($1 \leq i \leq n - 1$), b_kb_{k+1} ($1 \leq i \leq n - 1$), dan sisi-sisi $c_n\, e$, $d_n\, e$, $e\, f$, $b_n\, f$, serta $c_n\, f$. Pada halaman dua, letakkan sisi-sisi berikut $a_k\, c_k$, $a_k\, d_k$ ($1 \leq i \leq n$), $d_k\, d_{k+1}$ ($1 \leq i \leq n - 1$), dan $d_1\, f$. Terakhir, pada halaman tiga, letakkan sisi-sisi $c_k\, b_{k+1}$ ($1 \leq i \leq n - 1$), dan juga sisi-sisi a_1e, a_1f, b_1e, serta b_1d_n. Sehingga dibutuhkan tiga halaman untuk pembenaman M_n pada buku, jadi $\rho(M_n) \leq 3$. Dengan demikian $\rho(M_n) = 3$. □

Gambar 8 menyajikan contoh pembenaman buku M_3. Simpul-simpul diletakkan pada punggung, sisi-sisi di atas simpul, adalah pada halaman satu, sisi-sisi di bawah simpul yang digambar dengan garis bersambung adalah pada halaman dua pada Gambar 8(a). Sedangkan sisi-sisi pada Gambar 8(b) adalah pada halaman tiga.



(a) Halaman 1 dan Halaman 2.



(b) Halaman 3.

Gambar 8. Sebuah pembenaman buku M_3.

BAB 6
KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Pembenaman famili tak-hingga graf periodik plus reguler 4 H_n ($n \geq 3$) membutuhkan tiga halaman dan pembenaman buku famili tak-hingga graf periodik plus reguler 5 M_n ($n \geq 3$) juga membutuhkan tiga halaman.

6.2 Saran

Penelitian selanjutnya dalam topik ini dapat diarrahkan pada pembenaman buku untuk famili tak hingga graf reguler 7.

DAFTAR PUSTAKA

Balogh J and Salazar G 2015 Book embeddings of regular graphs. *SIAM Journal in Discrete Mathematics* **29** 811-22.

Chung F R T , Leighton F T and Rosenberg A L 1987 Embedding graphs in books: a layout problem with applications to VLSI design, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* **8** 33-58.

Kainen P C 1974 An introduction to topological graph theory, in *Graphs and Combinatorics*, Ed R Bari and F Harary (New York: Springer) pp 76-108.

Malitz S M 1994 Graphs with E edges have pagenumber O(√E), *J. Algorithms* **17** (1) 71–84.

Mohar B and Dvořák Z 2016 Crossing numbers of periodic graphs. *J. Graph Theory* **83** 34-43.

Pinontoan B and Richter R B 2003 Crossing numbers of sequences of graphs II: planar tiles. *J. Graph Theory* **42** 332-41.

Richter R B and Thomassen C 1993 Minimal graphs with crossing number at least *k*. *J. Combin.Theory Ser. B.* **58** (2) 217-23.

Lampiran

Surat Tugas Penelitian