Tentang Penulis

Prof. Dr. Benny Pinontoan, M.Sc. dilahirkan di Bitung, Sulawesi Utara, pada tanggal 4 Juni 1966. Dia mendapat beasiswa dan menyelesaikan S1 di bidang Technische Informatica pada Fakulteit Informatica, Technische Universiteit Eindhoven, Belanda, pada tahun 1993. Tahun 2002, dia menyelesaikan S3 di bidang Matematika pada School of Mathematics and Statistics, Carleton University, Ottawa, Kanada. Selama studi S3, dia bekerja sebagai *teaching assistant*.

Pada tahun 1995, penulis diangkat menjadi dosen di Universitas Sam Ratulangi (Unsrat) dan sejak 1 Maret 2006 menjadi guru besar Matematika pada Fakultas MIPA, Unsrat.

Jullia Titaley, S.Pd, M.Si dilahirkan di Ambon, pada tanggal 18 juli 1972. Lulus pada Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unpatti Ambon tahun 1996. Pada tahun 1998, mengikuti mendapatkan beasiswa Karya siswa Due-Project yang dibiayai Bank Dunia pada program studi Matematika Universitas Gadjah Mada dan lulus pada tahun 2001.

Pada tahun 2000 diangkat menjadi dosen pada Fakultas Teknik Universitas Sam Ratulangi dan kemudian pindah ke FMIPA Unsrat setelah menyelesaikan S2 nya dan bertugas sebagai dosen pada jurusan Matematika FMIPA Unsrat sejak 2002 sampai sekarang.

ISBN 978-602-6529-76-3

9 786026 529763

Penerbit
CV. PATRA MEDIA GRAFINDO
BANDUNG
Jl. Jend. Sudirman No. 736 - Bandung
Telp./Fax: 022-6040938, HP: 081214466604
e-mail: luhut68@yahoo.co.id
website: www.patramedia.com

Benny Pinontoan & Jullia Titaley

MATEMATIKA DISKRIT

CV. PATRA MEDIA GRAFINDO
BANDUNG

MATEMATIKA DISKRIT I

Logika, Himpunan, Aljabar Boolean

Benny Pinontoan
Jullia Titaley

Penerbit
CV. PATRA MEDIA GRAFINDO
BANDUNG

MATEMATIKA DISKRIT

Benny Pinontoan
Jullia Titaley

PMG

Penerbit
CV. PATRA MEDIA GRAFINDO BANDUNG
2019

MATEMATIKA DISKRIT

Penulis:
Benny Pinontoan
Jullia Titaley

Penerbit
CV. PATRA MEDIA GRAFINDO
BANDUNG
Jl. Jend. Sudirman No. 736 - Bandung
Telp/Fax. 022-6040938 HP. 081214466604
e-mail: Patramedia@gmail.com
website: www.patramedia.com

Anggota IKAPI

Cetakan pertama, Oktober 2019

Perpustakaan Nasional : Katalog dalam Terbitan

ISBN 978-602-6529-76-3

9 786026 529763

Hidden Lemma

A system in the universe
A universe of systems
Sea of ideas and desert of freedom
Spinning like a graph
In the spiral of science and technology
When love is the motivation,
Correctness is the method,
Efficiency is the limitation,
And simplicity is the goal,
Then creation will be the conclusion
But still ... beauty is the business

(Benny Pinontoan, 2006)

Kata Pengantar

Buku Matematika Diskrit ini disusun sebagai bahan ditujukan kepada mahasiswa Matematika dan mahasiswa bidang kelompok ilmu yang berkaitan dengan komputer seperti Ilmu Komputer, Teknik Informatika, Manajemen Informatika, Teknik Komputer, Teknik Informasi, Teknik Elektro, Sistem Informasi, dan lain-lain.

Buku ini terdiri dari 2 bagian. Pada bagia I disajikan dalam 5 bab dan dirancang untuk dipelajari sebagai pengantar. Namun, tentu saja hal ini disesuaikan dengan penekanan-penekanan yang diperlukan dan juga disesuaikan dengan kondisi mahasiswa dalam perkuliahan. Materi dalam buku ini merupakan pengenalan konsep-konsep Matematika Diskrit, yang meliputi: Logika, Teori Himpunan, Kuantifikasi, dan Aljabar Boolean,

Pada setiap bagian dalam sebuah bab, definisi, sifat-sifat, teorema, serta algoritma yang penting dirangkum di awal, kemudian diikuti dengan penjelasan, contoh-contoh, dan penerapan. Hal ini dimaksud agar mahasiswa memiliki overviu yang baik tentang materi. Definisi ditulis di dalam kotak ber garis tunggal, sedangkan sifat-sifat, lemma, teorema, atau korolari ditulis di dalam kotak dengan garis ganda. Algoritma diletakkan di antara garis datar, dan contoh-contoh diawali dengan judul berlatar belakang hitam dan tulisan putih serta diakhiri dengan tanda “□”. Adapun penomoran definisi, teorema, sifat, algoritma, contoh, tabel dan gambar diawali dengan nomor bagian.

Disadari bahwa latar belakang dan pengetahuan awal mahasiswa yang diterima di perguruan tinggi berbeda-beda, maka materi dalam buku ini sengaja dirancang mulai dari tingkat dasar, sehingga dalam mempelajari materi-materi ini tidak dituntut pengetahuan awal yang canggih. Namun begitu, disediakan juga soal-soal dengan tingkat kesulitan yang agak tinggi.

Meskipun diupayakan agar mahasiswa terbiasa dengan formalisasi matematik, baik dalam definisi, sifat atau teorema, algoritma, maupun dalam pembuktian dan penjelasan, namun untuk hal-hal tertentu tetap digunakan deskripsi informal untuk mempermudah pemahaman mahasiswa.

Materi dari buku ini didasarkan dan sebagian diambil dari sumber-sumber pustaka yang tercantum dalam Daftar Pustaka. Pembuktian sebagian teorema, lemma, korolari, dan algoritma, dilakukan dalam buku ini, sebagian lagi dijadikan latihan untuk pembaca, dan lainnya, karena tingkat kesulitannya, tidak dibahas dalam buku ini dan hanya dirujuk ke sumber pustaka.

Disadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna, oleh sebab itu sangat diperlukan koreksi, saran, kritik pembangun, dan masukan lainnya demi penyempurnaan, yang dapat disampaikan kepada penulis melalui email.

Manado, September 2019

Benny Pinontoan.
Jullia Titaley

DAFTAR ISI

Bab 1
Pendahuluan

All religions, arts and sciences are branches of the same tree.

Albert Einstein (1879 – 1955).

German/American Physicist and Mathematician.

Matematika Diskrit adalah cabang ilmu dari Matematika yang pada beberapa dekade terakhir ini mengalami perkembangan yang sangat cepat dan menarik perhatian banyak orang. Hal ini disebabkan antara lain karena penerapan Matematika Diskrit dalam teknologi informasi atau teknologi digital yang banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari dewasa ini, seperti komputer dan telepon genggam.

Sebelum kita membahas tentang materi-materi yang tercakup dalam Matematika Diskrit pada bab-bab berikutnya, dalam bab ini dijelaskan terlebih dahulu tentang pengertian Matematika Diskrit itu sendiri. Untuk keperluan penjelasan tentang pengertian Matematika Diskrit, terlebih dahulu akan dibahas tentang beberapa kumpulan bilangan, apa yang dimaksud dengan kumpulan berhingga dan kumpulan-tak hingga serta pengertian ketercacahan. Selain itu juga akan diberikan dua contoh masalah diskrit serta aneka metode penyelesaiannya yang juga sekaligus merupakan gambaran tentang materi-materi tercakup dalam Matematika Diskrit yang akan dibahas dalam buku ini.

Diharapkan setelah mempelajari bab ini, mahasiswa mampu menjelaskan pengertian Matematika Diskrit dan hal-hal yang terkait, serta dapat memberikan contoh-contoh praktis masalah diskrit beserta berbagai metode penyelesaiannya secara garis besar.

1.1 Beberapa Bilangan

Definisi 1.1

- **Bilangan** adalah sebuah objek abstrak matematika.
- $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, . . .\}$ adalah kumpulan bilangan **asli**.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, . . .\}$ adalah kumpulan bilangan **cacah**.
- $\mathbb{Z} = \{. . ., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, . . .\}$ adalah kumpulan bilangan **bulat**.
- Bilangan **rasional** adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk *m/n* dimana *m* adalah bilangan bulat dan *n* adalah bilangan bulat bukan 0. Kumpulan bilangan rasional dilambangkan dengan $\mathbb{Q}$. Bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk rasio seperti ini, dinamakan ***irrasional***.
  - Kumpulan bilangan **Nyata,** $\mathbb{R}$ terdiri dari bilangan rasional dan irrasional.
  - Kumpulan bilangan **Kompleks,** $\mathbb{C}$ terdiri dari semua bilangan yang dapat dinyatakan dengan $a + bi$, dimana *a* dan *b* adalah bilangan nyata, serta $i = \sqrt{-1}$ yang disebut bilangan **imajiner**.

Tiga titik (. . .) pada akhir barisan bilangan asli, cacah, dan bulat pada Definisi 1.1 di atas berarti pembaca harus “menerka” bilangan-bilangan berikutnya dengan mengikuti pola sebelumnya. Begitu juga dengan tiga titik pada awal barisan bilangan bulat, diterka dengan mengikuti pola bilangan sesudah itu.

Dalam Matematika, terdapat dua definisi tentang kumpulan bilangan asli (*natural numbers*), yaitu tanpa bilangan 0 dan termasuk bilangan 0. Dalam buku ini, kita membedakan kumpulan bilangan asli (tanpa bilangan 0) dengan kumpulan bilangan cacah (termasuk bilangan 0).

Simbol N, R, dan C berturut-turut diambil dari kata *Natural*, *Real*, dan *Complex* dalam bahasa Inggris. Sedangkan Q diambil dari kata bahasa Italia *Quoziente* yang berarti hasil pembagian dan simbol Z diambil dari kata *Zahlen* dalam bahasa Jerman yang berarti bilangan.

Kumpulan bilangan bersama dengan operasi membentuk sistem bilangan. Sistem bilangan asli adalah sistem bilangan yang paling sederhana. Dengan bilangan-bilangan ini kita dapat menghitung, seperti 1 matahari, 2 mata, 3 apel, 4 pensil, dan seterusnya.

Dalam sistem bilangan asli dan bilangan cacah, setiap bilangan memiliki penerus (penerus 4 adalah 5) dan setiap bilangan kecuali bilangan 1 untuk bilangan asli, dan 0 untuk bilangan cacah, memiliki pendahulu (pendahulu 8 adalah 7). Dengan demikian, kita dapat menggunakan bilangan asli atau bilangan cacah untuk mengurutkan. Contohnya, ”Indonesia adalah negara dengan populasi ke-4 terbanyak di dunia”.

Namun demikian, sistem bilangan asli dan bilangan cacah memiliki struktur matematik yang terbatas. Dalam sistem bilangan ini berlaku operasi penjumlahan dan perkalian tetapi tidak berlaku operasi pengurangan dan operasi pembagian (misalnya 1 – 2 bukan bilangan asli, dan 5/2 bukan bilangan asli). Sedangkan dalam sistem bilangan bulat berlaku operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian, namun tidak berlaku operasi pembagian. Untuk bilangan rasional, bilangan nyata dan bilangan kompleks, keempat operasi tersebut berlaku.

Bilangan rasional selain dapat ditulis dalam bentuk *a/b*, juga dalam bentuk desimal. Bentuk desimal bilangan rasional adalah berhingga atau tak-hingga tapi berulang. Sedangkan bentuk desimal bilangan irrasional adalah tak-hingga dan tak berulang. Pengertian tak-hingga akan dibahas pada Bagian 1.2.

Contoh 1.1.1

Bilangan-bilangan

- $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{-2}{3}, -\frac{3}{5}$.
- 123,4567.
- 23,98123123123123. . .
- $\sqrt{4}$

adalah contoh-contoh bilangan rasional. Tentu saja bilangan-bilangan asli, bilangan cacah, dan bulat adalah juga bilangan rasional.

□

Contoh 1.1.2

Contoh bilangan irrasional adalah:

- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{5}$
- π = 3,14159 . . . (huruf Yunani dibaca *pi*).

  π adalah luas lingkaran dengan jari-jari 1 dan yang sering nyatakan dengan pendekatan 22/7).

- Rasio emas (*golden ratio*), $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,6180339887 . . .

  (huruf Yunani dibaca *phi*).
  Jika sebuah garis lurus dibagi menjadi dua bagian a dan b dengan $a > b$, maka Φ adalah rasio a/b yang memenuhi syarat $(a + b)/a = a/b$. Atau dengan kata lain, Φ adalah akar positif dari persamaan $x^2 - x - 1 = 0$.

□

Notasi tiga titik pada π dan Φ berarti "dan seterusnya" meskipun tidak lagi mengikuti pola sebelumnya karena memang tidak ada pola sebelumnya.

Bilangan nyata adalah semua bilangan rasional dan irrasional. Kumpulan bilangan yang lebih besar daripada bilangan nyata adalah bilangan kompleks.

Contoh 1.1.3

Persamaan

$$x^2 + 1 = 0$$

memiliki solusi dalam bilangan kompleks, yaitu $\pm\sqrt{-1} = \pm\, i$.

□

1.2 Kumpulan Berhingga dan Kumpulan Tak-hingga

Definisi 1.2

Sebuah kumpulan objek dikatakan kumpulan **berhingga** (*finite*) jika ada bilangan asli n sehingga untuk setiap anggota kumpulan tersebut bisa dipasangkan secara unik dengan bilangan asli 1 sampai dengan n. Kumpulan ini dikatakan memiliki **ukuran** n. Kumpulan yang tanpa anggota memiliki ukuran 0. Sebuah kumpulan objek dinamakan kumpulan **tak-hingga** (*infinite*) jika kumpulan itu bukan berhingga.

Jika A dan B adalah dua kumpulan objek, maka anggota A dapat dipasangkan dengan anggota B. Jika a dari A dipasangkan dengan b dari B maka kita akan tulis pasangan ini (a, b). Pemasangan dari anggota A ke anggota B bisa unik atau tidak unik.

Contoh 1.2.1

Misalkan, A = {mangga, jeruk, apel} dan B = {1, 2, 3, 4}, maka:

- (mangga, 1), (jeruk, 2), dan (apel, 3) adalah contoh pemasangan unik.
- (mangga, 1), (jeruk, 2), dan (apel, 2) adalah contoh pemasangan tidak unik karena jeruk dan apel dipasangankan dengan anggota yang sama dari B, yaitu 2.

□

Dengan bilangan cacah, kita dapat menentukan banyaknya anggota sebuah kumpulan.

Contoh 1.2.2

Misalkan, A = {mangga, jeruk, apel} adalah kumpulan berhingga karena anggota-anggotanya dapat pasangkan secara unik dengan bilangan asli 1 sampai dengan $n = 3$, yaitu (mangga, 1), (jeruk, 2), dan (apel, 3). Dengan kata lain, anggota-anggotanya dapat dihitung mulai dari 1 sampai dengan $n = 3$ untuk anggota terakhir. Jadi A berukuran 3.

□

Meskipun demikian, kumpulan berhingga bisa sangat banyak. Misalnya, kumpulan bintang di langit atau kumpulan pasir di laut.

Untuk kumpulan tak-hingga A, untuk setiap bilangan asli n yang kita pilih untuk dipasangkan secara unik dengan setiap anggota A dari bilangan 1 sampai dengan n, selalu saja masih terdapat anggota A yang tidak terpasangkan. Bisa juga dikatakan bahwa untuk setiap bilangan asli *n* yang kita pilih, banyaknya anggota kumpulan tak-hingga melebihi *n*. Kumpulan tak-hingga tidak memiliki anggota terakhir.

Contoh 1.2.3

- N, N^+, Z, Q, R, dan C adalah kumpulan bilangan tak-hingga.
- {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, . . . } adalah kumpulan bilangan tak-hingga.
- {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . . } kumpulan bilangan Fibonacci adalah tak-hingga.

1.3 Ketercacahan

Definisi 1.3

Sebuah kumpulan *K* dinamakan **tercacahkan** (*countable*), jika *K* adalah:

- Kumpulan hingga, atau
- Kumpulan tak-hingga yang anggota-anggotanya dapat dipasangkan secara unik dengan bilangan-bilangan cacah $\mathbb{N}$.

Dengan demikian, setiap kumpulan berhingga adalah tercacahkan.

Contoh 1.3.1

Kumpulan yang terdiri dari mangga, jeruk, dan apel adalah tercacahkan, karena
mangga, jeruk, dan apel dapat dipasangkan berturut-turut dengan 0, 1, dan 2.

Yang agak rumit menentukan ketercacahkan sebuah kumpulan tak-hingga.

Contoh 1.3.2

Kumpulan bilangan Bulat adalah tercacahkan.

Untuk melihat ini, kita atur kumpulan bilangan bulat sebagai berikut:

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, . . .

dan memasangkan masing-masing bilangan berturut-turut dengan

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, . . .

Sehingga anggota-anggota Z dapat dipasangkan secara unik dengan anggota-anggota N.

□

Contoh 1.3.3

Kumpulan bilangan Rasional adalah tercacahkan.

Untuk menunjukkan ini, kita tinggalkan kepada para pembaca sebagai latihan.

□

1.4 Apa itu Matematika Diskrit?

Definisi 1.4

Matematika Diskrit adalah kumpulan topik matematika yang mempelajari dan menggunakan kumpulan objek matematika yang:

- hingga, atau
- tak-hingga yang tercacahkan.

Untuk lebih memahami pengertian diskrit, kita dapat mencermati hal-hal yang bukan diskrit, yaitu hal-hal yang dinamakan kontinu. Waktu adalah contoh hal yang kontinu karena diantara setiap dua tanda waktu, misalnya fraksi detik, terdapat tanda waktu yang lain. Kumpulan bilangan nyata juga adalah kontinu, karena setiap dua bilangan nyata x and y, dimana $x < y$, selalu kita dapat temukan z sehingga $x < z < y$. Garis pada segitiga, misalnya, juga adalah kontinu. Objek-objek kontinu tidak dapat dipisalkan saling lepas satu dengan yang lain.

Sebaliknya, objek-objek diskrit dapat dipisahkan saling lepas satu dengan yang lain. Misalkan bilangan bulat (1 dan 2 dapat dipisahkan karena tidak ada bilangan diantaranya), huruf-huruf dalam abjad, bahkan pasir-pasir di laut, bintang-bintang di langit, dan simbol-simbol dalam teks ini.

Semua peralatan digital seperti komputer, telepon seluler, arlogi digital adalah diskrit. Peralatan digital bisa menyimpan begitu banyak tetapi berhingga data. Sehingga misalnya banyaknya angka bilangan π yang dapat dipresentasikan oleh komputer terbatas.

Meskipun topik-topik yang dipelajari dalam Matematika Diskrit adalah objek-objek diskrit, namun sering juga objek-objek ini berkaitan dengan objek-objek kontinu. Misalnya, dalam mempelajari graf (Bab 12), yang terdiri dari kumpulan simpul yang berhingga dan kumpulan sisi yang berhingga, dimana sisi-sisi graf biasanya digambarkan pada bidang sebagai garis-garis kontinu. Namun demikian, penekanan topik bukan pada kekontinuan garis yang menyajikan sisi, tetapi pada hal-hal diskrit yang terkait, seperti banyaknya sisi yang dimiliki oleh graf tersebut, apakah sisi-sisi graf tersebut bisa digambarkan pada bidang tanpa berpotongan satu dengan yang lain, jika terdapat perpotongan, berapa banyak perpotongan minimum, apa yang akan terjadi jika sisi dihilangkan, dan sebagainya.

1.5 Bebarapa Masalah Diskrit dan Metode Penyelesaiannya

A. Masalah 1

a. Masalah sederhana.
Diberikan sebuah bola dan dua warna, katakanlah merah dan biru. Dengan berapa cara bola itu diwarnai? Jawabannya adalah dua cara, yaitu merah dan biru.

b. Masalah lebih rumit.
Diberikan lima bola dan dua warna, katakanlah merah dan biru. Dengan berapa cara bola-bola itu diwarnai?
Tentu saja harus diperjelas bahwa yang dimaksud adalah:
- Bola-bola adalah identik dan tidak berwarna.
- Tidak semua warna harus digunakan.
- Semua bola harus diwarnai.

Sehingga persoalannya menjadi: berapa bola yang menggunakan masing-masing warna? Dengan menggunakan tabel di bawah ini, kita bisa lihat bahwa jawaban masalah ini adalah enam cara.

Tabel 1.5.1: Masalah lebih rumit

Cara	Merah	Biru
1	0	5
2	1	4
3	2	3
4	3	2
5	4	1
6	5	0

c. Masalah Umum

Jika diberikan w (bilangan cacah) warna, dengan berapa cara b (bilangan cacah) bola diwarnai?

Misalkan x_i adalah banyaknya bola yang diwarnai dengan warna i, maka

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_w = b,$$

dimana x_i adalah bilangan cacah, untuk $i = 1, 2, \ldots, w$.
Banyaknya solusi untuk persamaan ini kita namakan fungsi $f(w, b)$. (Lebih banyak tentang fungsi akan dibahas pada Bab 6).

Metode 1: Kasus Sederhana

Untuk nilai w atau b yang kecil, nilai $f(w, b)$ dapat dilihat pada Tabel 1.5.2 di bawah ini. Jika tidak ada bola yang akan diwarnai, $b = 0$, maka kita memiliki satu solusi yaitu semua $x_i = 0$, sehingga $f(w, 0) = 1$, untuk $w \geq 0$. Jika hanya terdapat satu bola, $b = 1$, maka banyaknya cara pewarnaan adalah sebanyak warna yang ada, sehingga $f(w, 1) = w$. Untuk $b \geq 2$, jika tidak ada warna, maka tidak terjadi pewarnaan sehingga $f(0, b) = 0$, jika cuma satu warna, maka hanya satu cara pewarnaan, jadi $f(1, b) = 1$, sedangkan jika banyaknya warna ada dua, maka diperoleh $b + 1$ cara pewarnaan seperti pada contoh masalah yang lebih rumit di atas, sehingga $f(2, b) = b + 1$.

Tabel 1.5.2: Kasus Sederhana

Banyaknya warna w	**Banyaknya bola** b	**Banyaknya cara pewarnaan** $f(w, b)$
≥ 0	0	1
≥ 0	1	w
0	≥ 2	0
1	≥ 2	1
2	≥ 2	$b + 1$

Metode 2: Membawa ke Kasus yang Lebih Sederhana

Misalkan kita memiliki tiga warna, yaitu merah, kuning, dan biru untuk mewarnai empat bola. Jadi dalam hal ini $w = 3$ dan $b = 4$. Kita pisahkan ini menjadi dua kasus, yaitu kasus dimana kita menggunakan warna merah dan kasus dimana kita tidak menggunakan warna merah. Untuk kasus pertama, karena warna merah digunakan, maka satu bola sudah pasti berwarna merah, sehingga masalahnya menjadi bagaimana mewarnai tiga bola dengan tiga warna, yaitu $f(3, 3)$. Dengan kata lain, kita menentukan berapa solusi untuk persamaan:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3$$

dimana y_1, y_2, y_3 adalah bilangan cacah. Dengan cara tabulasi seperti pada Tabel 1.5.1, kita peroleh $f(3, 3) = 10$.

Untuk kasus kedua, karena merah tidak digunakan, kita hanya memiliki dua warna untuk mewarnai empat bola, yaitu $f(2, 4)$. Dari Tabel 1.5.2, kita peroleh $f(2, 4) = 5$. Sehingga

$$\begin{aligned} f(3, 4) &= f(3, 3) + f(2, 4) \\ &= 10 + 5 = 15, \end{aligned}$$

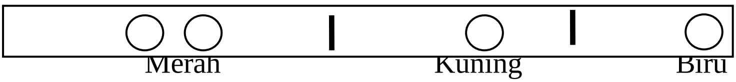
dan secara umum, untuk $w > 0$ dan $b > 0$, berlaku

$$f(w, b) = f(w\text{-}1, b) + f(w, b\text{-}1).$$

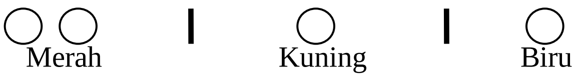
Metode seperti ini dinamakan metode **rekursi**, yang akan dibahas pada Bab 10.

Metode 3: Menjadikan Masalah Lain

Misalkan kita memiliki tiga warna, yaitu merah, kuning, dan biru untuk mewarnai empat bola, jadi $w = 3$ dan $b = 4$. Hal ini sama saja dengan kita memiliki tiga bilik masing-masing berwarna merah, kuning, dan biru. Berapa cara meletakkan empat bola identik ke dalam tiga bilik tersebut? Jadi misalnya, jika kita mewarnai dua bola dengan merah, satu bola dengan kuning, dan satu bola dengan biru, maka berarti ada dua bola di bilik merah, satu bola di bilik kuning, dan satu bola di bilik biru, sebagai berikut:



Perhatikan bahwa tiga bilik terdapat dua pemisah. Jika dinding-dinding luar kita hilangkan, maka konfigurasi di atas menjadi:



atau

0 0 1 0 1 0

yang adalah barisan $2 + 4 = (w - 1) + b$ elemen yang terdiri dari $2 = (w - 1)$ angka ”1” dan sebanyak $4 = b$ angka ”0”. Sehingga persoalannya adalah berapa cara menempatkan dua ”1” di antara (termasuk pada ujung kiri dan kanan) barisan empat ”0”?

Secara umum, masalahnya menjadi: ada berapa cara menempatkan $w - 1$ angka ”1” di antara (termasuk ujung kiri dan unjung kanan) b angka ”0”?

B. Masalah 2

Misalkan n ($n \geq 0$) bola berwarna putih diberi nomor 1 sampai dengan n. Berapa banyak cara bola-bola itu diwarnai dengan warna hitam?

Tentu saja harus diperjelas bahwa yang dimaksud adalah:

- Bola-bola berwarna putih dan telah diberi nomor berbeda sehingga tidak identik.
- Bola bisa diwarnai, bisa tidak.

Metode 1: Kombinasi

Terdapat $n \geq 0$ bola. Setiap bola memiliki 2 cara pewarnaan yaitu diwarnai dengan hitam atau tidak (tetap berwarna putih). Sehingga banyaknya cara untuk mewarnai n bola adalah:

$$2 \times 2 \times 2 \times . . . \times 2 = 2^n$$

Pendekatan seperti ini disebut permutasi dengan pengulangan yang akan dibahas pada Bab 8.

Metode 2: Himpunan Bagian

Jika didefinisikan bahwa himpunan adalah kumpulan objek dengan kesamaan karakter, dan jika setiap anggota A adalah juga anggota B, maka A disebut himpunan bagian dari B (lebih banyak tentang himpunan akan dibahas pada Bab 3). Sehingga kumpulan bola S bisa dipandang sebagai himpunan dan permasalahannya menjadi berapa banyak himpunan bagian dari S jika jumlah anggota S adalah $n \geq 0$? Tabel 1.5.3, mendaftarkan himpunan-himpinan bagian untuk n = 0, 1, 2, dan 3.

Tabel 1.5.3: Himpunan Bagian

n	***S***	**Himpunan bagian dari *S***	**Banyaknya himpunan bagian**
0	{ }	{ }	1
1	{1}	{}, {1}	2
2	{1, 2}	{}, {2} {1}, {1, 2}	4
3	{1, 2, 3}	{}, {2}, {3}, {2, 3} {1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 2, 3}	8

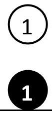
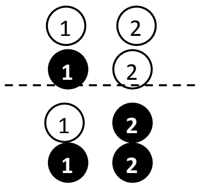
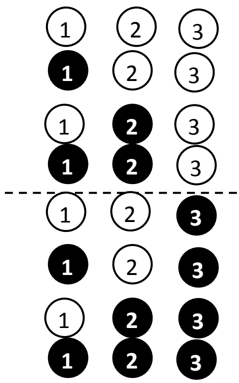
Dengan meneruskan pola ini, diperoleh bahwa banyaknya himpunan bagian untuk S dengan n anggota adalah 2^n.

Metode 3: Rekursi

Misalkan P_n ($n \geq 0$) adalah banyaknya cara pewarnaan n bola dengan warna hitam. Tentu saja jika $n = 0$ tidak ada yang diwarnai, maka hanya terdapat 1 cara. Jadi, $P_0 = 1$.

Tabel 1.5.4 menyajikan pewarnaan untuk $n = 0$, 1, 2, dan 3. Perhatikan untuk $n \geq 2$, banyaknya cara pewarnaan $n - 1$ bola pertama di atas garis putus-putus dan banyaknya pewarnaan di bawah garis putus-putus adalah sama. Yang membedakan adalah: yang di atas garis putus-putus bola n tidak diwarnai sedangkan yang di bawah garis putus-putus, bola n diwarnai.

Tabel 1.5.4: Rekursi

n	**Pewarnaan**	$\boldsymbol{P_n}$
0	Tidak ada	1
1		2
2		4
3		8

Dengan mencermati pola ini, maka untuk $n \geq 1$, banyaknya cara pewarnaan n bola adalah banyaknya cara pewarnaan $n - 1$ bola tanpa mewarnai bola nomor n ditambah dengan banyaknya pewarnaan $n - 1$ bola dengan mewarnai bola n. Yang pertama adalah P_n, sedangkan yang kedua juga adalah P_n. Sehingga,

$$P_0 = 1$$

$$P_n = 2P_{n-1}, \text{ untuk } n \geq 1.$$

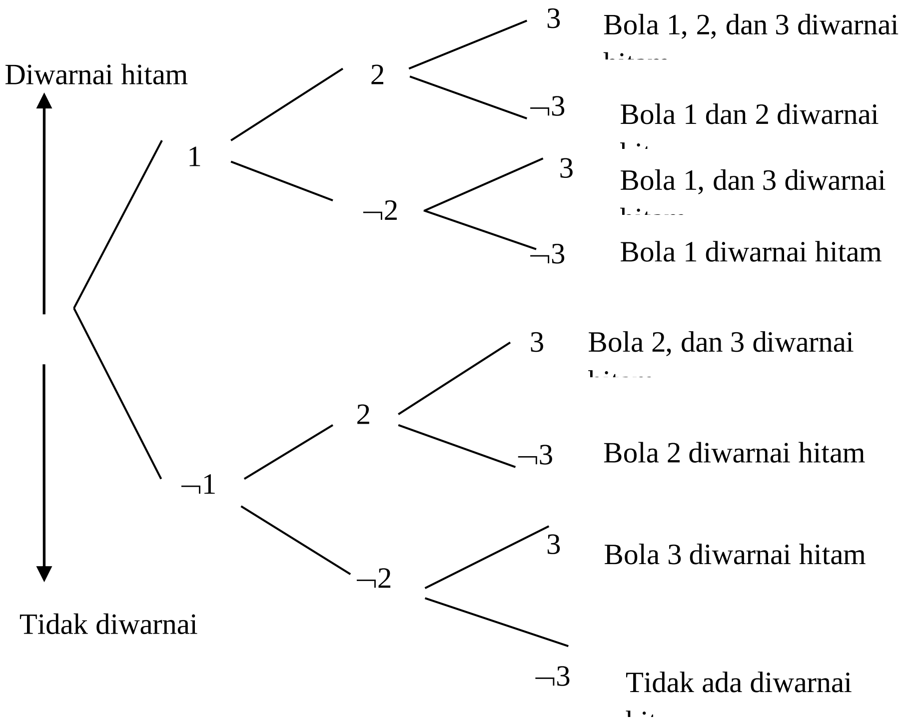
Dengan demikian, diperoleh

$$P_n = 2P_{n-1} = 2(2P_{n-2}) = 2^2P_{n-2} = . . . = 2^{n-1}P_1 = 2^nP_0 = 2^n.$$

Metode seperti ini dinamakan rekursi, yang akan dibahas pada Bab 10.

Metode 4: Pohon

Masalah ini juga dapat diselesaikan dengan pendekatan pohon biner (pohon biner adalah bentuk khusus graf yang akan dibahas pada Bab 12). Kita selidiki untuk kasus n = 3. Perhatikan pohon biner pada Gambar 1.5.1 di bawah ini, dengan simpul masing-masing v yang mengindikasikan bahwa bola nomor v diwarnai hitam atau $\neg v$ yang mengindikasikan bahwa bola nomor v tidak diwarnai.



Gambar 1.5.1: Pohon biner

Untuk $n = 3$, diperoleh 2^3 banyaknya cara pewarnaan. Dengan mengikuti pola seperti ini, maka untuk $n \geq 0$, banyaknya pewarnaan adalah 2^n.

Metode 5: Binomial

Sekarang kita akan hitang banyaknya cara pewarnaan berdasarkan banyaknya bola yang diwarnai. Misalkan, bola-bola tersebut dimasukkan ke dalam sebuah kotak. Dari dalam kotak kita mengambil serentak k bola untuk diwarnai. Pengambilan k objek dari total n objek ini disebut kombinasi dan dinotasikan dengan $\binom{n}{k}$, dimana

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ dan } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$$

(kombinasi adalah salah satu topik bahasan pada Bab 8 tentang Kombinatorika).

Tabel 1.5.5 menyajikan hasil perhitungan untuk $n = 4$ dan $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Tabel 1.5.5: Binomial

Banyaknya bola yang diwarnai, *k*.	Bola-bola yang diwarnai	Rumus	Banyaknya cara
0	Tidak ada	$\binom{4}{0}$	1
1	{1}, {2}, {3}, {4}	$\binom{4}{1}$	4
2	{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3,	$\binom{4}{2}$	6

	4}		
3	{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}	$\binom{4}{3}$	4
4	{1, 2, 3, 4}	$\binom{4}{4}$	1

Sehingga, untuk n = 4, total banyaknya cara pewarnaan adalah:

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4.$$

Dengan menggeneralisasi pola ini, maka untuk n bola, diperoleh banyaknya cara pewarnaannya adalah:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

Metode 6: Biner

Cara lain untuk menyelasaikan masalah ini adalah dengan pendekatan penyajian biner sebagai berikut (lebih banyak tentang penyajian biner akan dibahas pada Bab 7 tentang Aljabar Boolean dan Bab 9 tentang Teori Bilangan). Untuk bola nomor k:

$$k = \begin{cases} 1, & \text{jika bola } k \text{ diwarnai hitam} \\ 0, & \text{jika bola } k \text{ tidak diwarnai} \end{cases}$$

Jika bola nomor k diwarnai, maka bola nomor k diindikasikan dengan 1 dan jika tidak diwarnai, maka diindikasikan dengan 0.

Penyajian biner untuk n = 3 ditunjukkan pada Tabel 1.5.6.

Tabel 1.5.6: Representasi biner.

Desimal	**Bola nomor**		
	1	**2**	**3**

0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Jadi untuk $n = 3$, kita peroleh $8 = 2^3$ cara. Dengan menggeneralisasi pola ini, diperoleh, banyaknya cara pewarnaan n bola adalah 2^n.

Soal-soal Latihan 1

1.1. Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrasional.

1.2. Tunjukkan bahwa kumpulan bilangan ganjil 1, 3, 5, 7, ... adalah tercacahkan.

1.3. Tunjukkan bahwa kumpulan bilangan rasional Q tercacahkan.

1.4. Tentukan berapa banyak cara untuk mewarnai 6 bola dengan 3 warna jika setiap warna harus gunakan.

   a. Formulasikan dalam bentuk banyaknya solusi sebuah persamaan.

   b. Untuk nilai *w* dan *b* yang mana jawabnya 0, dan Untuk nilai *w* dan *b* yang mana jawabnya 1?

   c. Formulasikan masalah ini ke dalam masalah pewarnaan di mana tidak semua warna harus digunakan.

1.5. Misalkan 5 bola berwarna putih diberi nomor 1 sampai dengan *n*. Tentukan banyaknya cara bola-bola itu diwarnai dengan warna hitam dengan menggunakan masing-masing dari 6 metode di atas.

Bab 2
Logika

Logic will get you from A to B. Imagination will take you everywhere.
Albert Einstein (1879 – 1955).
German/American Physicist and Mathematician.

Logika (*logic*) berasal dari kata bahasa Yunani kuno λόγος (logos), yang awalnya berarti "kata" atau "apa yang diucapkan" tapi kemudian memiliki arti sebagai "pemikiran" atau "penalaran".

Studi sistematis pertama tentang logika, terutama dalam penalaran logis, dilakukan oleh filsuf Yunani Aristoteles (384 – 322 SM) yang kemudian dikembangkan oleh ahli matematika Jerman Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716) menjadi logika simbolik yang dianggap sebagai bahasa dari ilmu pengetahuan secara universal.

Dalam bab ini akan dibahas tentang kalimat-kalimat pernyataan yang dinamakan proposisi yang hanya memiliki satu dari dua nilai, yaitu benar atau salah. Selanjutnya akan dibahas bagaimana cara mengevaluasi nilai dari sebuah proposisi melalui tabel kebenaran, bagaimana merangkai proposisi menjadi proposisi baru dengan menggunakan operator atau perangkai, dan mengevaluasi kebenaran proposisi yang terbentuk. Kemudian, akan dipelajari beberapa hukum dan aturan logika serta bagaimana menggunakannya untuk membuktikan kebenaran sebuah proposisi.

Akhirnya akan dibahas tentang predikat, yaitu proposisi yang mengandung variabel beserta beberapa kuantor.

Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa diharapkan mampu membedakan kalimat mana yang termasuk proposisi atau predikat dan mana yang tidak, mampu mengevaluasi kebenaran sebuah proposisi, mengetahui dan dapat menggunakan hukum-hukum serta aturan-aturan logika untuk membuktikan kebenaran sebuah proposisi atau predikat.

2.1 Proposisi

Definisi 2.1

1. **Proposisi** (*proposition*) adalah sebuah kalimat yang bernilai T (*true*, benar) atau F (*false*, salah), tetapi tidak keduanya.
2. **Proposisi primitif** (*primitive proposition*) adalah proposisi yang tidak dapat diuraikan menjadi proposisi yang lebih sederhana.

Proposisi sering juga disebut **kalimat deklaratif** atau **pernyataan** (*statement*) dan proposisi primitif juga dikenal dengan **proposisi sederhana** atau **proposisi atomik**. Selain menggunakan nilai T (*true*) dan F (*false*), juga nilai 1 (satu) dan 0 (nol) juga sering digunakan.

Kita akan menggunakan huruf kecil, seperti *p* dan *q* untuk proposisi.

Contoh 2.1.1

Pernyataan-pernyataan berikut adalah proposisi primitif:

- p_1 : *Hari ini hujan.*
- p_2 : *Ini Budi.*
- p_3 : $3 + 4 = 7$.
- p_4 : $4 \times 3 = 5$.

Pernyataan-pernyataan berikut adalah proposisi tapi bukan proposisi primitif:

- *Ini bukan Budi*
- *Jika hari hujan maka ini Budi*.
- $3 + 4 = 7$ atau $4 \times 3 = 5$.

Kalimat seru atau kalimat perintah bukan proposisi:

- *Luar biasa indahnya*!
- *Kerjakan pekerjaan itu*!

Sedangkan kalimat seperti ”$x + 3 = 5$” bukanlah proposisi karena kebenarannya tergantung pada nilai dari variabel x. Jika nilai x adalah 2, maka pernyataan ini adalah benar sedangkan jika nilai x adalah 1, maka pernyataan ini adalah salah. Kalimat seperti ini disebut **predikat** (*predicate*) yang akan dibahas pada Bagian 2.6 bab ini.

□

2.2 Operasi Logika dan Tabel Kebenaran

Sebuah proposisi dapat dijadikan kalimat penyangkalan atau negasi. Dua proposisi dapat pula dikombinasikan menjadi **proposisi majemuk** dengan menggunakan operator. Proposisi pembentuk proposisi majemuk ini disebut **komponen**. Beberapa operator dasar logika didefinisikan di bawah ini.

Definisi 2.2

1. Jika p dan q adalah proposisi, maka:
   - $\neg p$ adalah **negasi** atau penyangkalan dari p, dan dibaca "**non** *p*"
   - $p \wedge q$ adalah **konjungsi** dari p dan q, dan dibaca "*p* **dan** *q*".
   - $p \vee q$ adalah **disjungsi** dari p dan q, dan dibaca "*p* **atau** *q*".
   - $p \rightarrow q$ adalah **implikasi** dari p ke q, dan dibaca "**jika** *p* **maka** *q*";
   - $p \leftrightarrow q$ adalah **bikondisional** atau **bi-implikasi** antara p dan q, dan dibaca "*p* **jika dan hanya jika** *q*".

3. **Tabel kebenaran** adalah tabel yang mengevaluasi kebenaran sebuah proposisi untuk semua kombinasi nilai dari komponen-komponen primitifnya.
4. Proposisi yang bernilai T untuk semua kombinasi nilai komponen-komponen primitifnya, disebut **tautologi**. Sebaliknya yang bernilai F disebut **kontradiksi**.

Negasi $\neg p$ dari proposisi p selain dibaca ”non p”, juga sering dibaca:

- bukan p
- tidak p
- negasi p

sedangkan pada pernyataan $p \rightarrow q$, proposisi p dinamakan asumsi sedangkan q dinamakan konklusi dari implikasi. Pernyataan ini selain dibaca ”jika p maka q”, juga sering dibaca:

- p implikasi q
- p cukup untuk q
- p hanya jika q
- q perlu untuk p

Adapun pernyataan $p \leftrightarrow q$ selain dibaca ”p jika dan hanya jika q” dan disingkat ”p **iff** q” juga yang sering dibaca

- p ekivalen q
- p cukup dan perlu untuk q

Contoh 2.2.1

Misalkan p_1, p_2, p_3, dan p_4 adalah proposisi primitif berikut:

p_1 : *Hari ini hujan.*

p_2 : *Ini Budi.*

p_3 : $3 + 4 = 7$.

p_4 : $4 \times 3 = 5$.

Maka:

- $\neg p_1$ adalah negasi dari “Hari ini hujan”, yaitu “Hari ini tidak hujan”. Sedangkan
  $\neg p_2$ adalah negasi dari “Ini Budi”, yaitu “Ini bukan Budi”.
- $p_1 \wedge p_2$ adalah ”Hari ini hujan dan ini Budi”.
- $p_1 \vee p_2$ adalah ”Hari ini hujan atau ini Budi”.
- $p_3 \rightarrow p_4$ adalah ”Jika $3 + 4 = 7$ maka $4 \times 3 = 5$.

- $p_1 \leftrightarrow p_3$ adalah ”Hari ini hujan jika dan hanya jika 3 + 4 = 7.

□

Prioritas operator di atas adalah sebagai berikut:

$$\neg$$
$$\wedge \quad \vee$$
$$\rightarrow$$
$$\leftrightarrow$$

yang berarti bahwa ekspresi seperti

$$p_1 \rightarrow \neg p_2 \wedge p_3 \leftrightarrow p_4 \vee p_5$$

dimaksudkan sebagai berikut:

$$(p_1 \rightarrow ((\neg p_2) \wedge p_3)) \leftrightarrow (p_4 \vee p_5).$$

Negasi $\neg p$ dari proposisi p benilai F (*false*, salah) jika p bernilai T (*true*, benar) dan sebaliknya. Nilai $p \wedge q$ hanya benilai T, jika nilai p dan q keduanya T, sedangkan $p \vee q$ hanya akan bernilai F, jika nilai p dan q keduanya F. Nilai $p \rightarrow q$ hanya akan bernilai F, jika nilai p bernilai T dan nilai q adalah F, sedangkan $p \leftrightarrow q$ hanya akan bernilai T, jika nilai p sama dengan nilai q. Nilai dari masing-masing oparasi untuk berbagai kemungkinan nilai komponennya dapat dilihat pada Tabel 2.2.1 dan Tabel 2.2.2 yang dinamakan **tabel kebenaran**.

Tabel 2.2.1: Tabel kebenaran $\neg$

p	$\neg p$
F	T
T	F

Tabel 2.2.2: Tabel kebenaran $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, dan $\leftrightarrow$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

Tabel kebenaran dapat digunakan untuk mengevaluasi kebenaran sebuah proposisi.

Contoh 2.2.2

Tentukan kebenaran dari proposisi-proposisi berikut:

- $(p \vee q) \rightarrow p$.
- $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$.

Jawab:

Evaluasi kebenaran dari proposisi $(p \vee q) \rightarrow p$ dapat dilihat pada Tabel 2.2.3.

Tabel 2.2.3: Tabel kebenaran $(p \vee q) \rightarrow p$.

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow p$
F	F	F	T
F	T	T	F
T	F	T	T
T	T	T	T

Sedangkan evaluasi kebenaran dari $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$ dapat dilihat pada Tabel 2.2.4.

Tabel 2.2.4: Tabel kebenaran $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{p \wedge (p \vee q)}$	$\boldsymbol{(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p}$
F	F	F	F	T
F	T	T	F	T
T	F	T	T	T
T	T	T	T	T

Dari Tabel 2.2.3 dan Tabel 2.2.4 disimpulkan bahwa,

- $(p \vee q) \rightarrow p$, bukan trautologi karena tidak semua nilainya T.
- $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$, adalah tautologi, karena semua nilainya T.

□

Contoh 2.2.3

Tentukan nilai dari $\neg(p \rightarrow (p \vee q))$.

Jawab:

Tabel 2.2.5 adalah tabel kebenaran dari $\neg(p \rightarrow (p \vee q))$.

Tabel 2.2.5: Tabel kebenaran $\neg(p \rightarrow (p \vee q))$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{p \rightarrow (p \vee q)}$	$\boldsymbol{\neg(p \rightarrow (p \vee q))}$
F	F	F	T	F
F	T	T	T	F
T	F	T	T	F
T	T	T	T	F

Dari Tabel 2.2.5 terlihat bahwa nilai dari $\neg(p \rightarrow (p \vee q))$ adalah F untuk semua kombinasi nilai komponen-komponen primitifnya. Sehingga $\neg(p \rightarrow (p \vee q))$ adalah kontradiksi.

2.3 Ekivalensi Logis

Definisi 2.3

Jika $p \leftrightarrow q$ adalah tautologi untuk proposisi p dan proposisi q, maka disebut "p **ekivalen logis** dengan q", dan ditulis $p \Leftrightarrow q$.

Tabel 2.3.1 mendaftarkan beberapa ekivansi logis yang merupakan hukum-hukum logika.

Tabel 2.3.1: **Hukum-hukum Logika**

No	Ekivalensi logis	Nama
1	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Negasi ganda
2	$(p \vee p) \Leftrightarrow p$ $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$	Idempoten
3	$(p \vee \mathrm{T}) \Leftrightarrow \mathrm{T}$ $(p \wedge \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$	Dominasi
4	$(p \vee \mathrm{F}) \Leftrightarrow p$ $(p \wedge \mathrm{T}) \Leftrightarrow p$	Identitas
5	$(p \vee \neg p) \Leftrightarrow \mathrm{T}$ $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow \mathrm{F}$	Invers
6	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	Komutatif
7	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	Asosiatif
8	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributif

9	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	Absorpsi
10	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	De Morgan
11	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	Kontraposisi atau Kontrapositif
12	$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Ekivalensi
13	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$	Implor (Implication to Or)

Contoh 2.3.1

Telah ditunjukkan pada Contoh 2.2.2 bahwa $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$ adalah tautologi, sehingga ditulis $(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$, yaitu Hukum Absorpsi.

□

Contoh 2.3.2

Salah satu Hukum De Morgan, yaitu $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, dibuktikan pada Tabel 2.3.2 yang menunjukkan bahwa $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ adalah tautologi.

Tabel 2.3.2: Tabel kebenaran $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T
T	T	T	F	F	F	F	T

□

Contoh 2.3.3

Pembuktian Hukum Implor $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ ditunjukkan pada Tabel 2.3.3. Ekivalensi ini menunjukkan bahwa operator "$\rightarrow$" dapat diekspresikan dengan operator "$\vee$".

Tabel 2.3.3: Tabel kebenaran $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
T	T	F	T	T	T

□

Dengan menggunakan hukum-hukum logika, kita dapat membuktikan ekivalensi logis lainnya.

Contoh 2.3.4

Buktikan $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$.

Jawab:

Bukti:

	Alasan
$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	
$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg q$	Implor
$\Leftrightarrow \neg q \wedge (\neg p \vee q)$	Komutatif
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)$	Distributif
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p) \vee \mathrm{F}$	Invers
$\Leftrightarrow (\neg q \wedge \neg p)$	Identitas
$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	Komutatif
$\Leftrightarrow \neg(p \vee q)$	De Morgan

Contoh 2.3.5

Buktikan $((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$.

<u>Jawab</u>:

Bukti:

$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r)$	**<u>Alasan</u>**
$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q \wedge r)$	Implor
$\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (p \wedge q \wedge r)$	De Morgan
$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge q \wedge r)$	Negasi ganda
$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee ((p \wedge q) \wedge r)$	Pemberian dalam kurung
$\Leftrightarrow (p \vee q)$	Absorpsi

□

2.4 Implikasi Logis

Definisi 2.4

1. Implikasi $p \rightarrow q$ juga disebut **argumen**, di mana proposisi p disebut **premis** dan proposisi q disebut **konklusi**.
2. Jika argumen $p \rightarrow q$ tautologi, maka disebut "*p* **implikasi logis** *q*" atau dikatakan $p \rightarrow q$ adalah **argumen valid**, dan ditulis $p \Rightarrow q$.
3. **Aturan Inferens** adalah aturan yang didasarkan pada argumen valid.
4. **Kontrapositif** atau **kontraposisi** dari $p \rightarrow q$ adalah $\neg q \rightarrow \neg p$ dan
   $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$.
5. **Konvers** dari $p \rightarrow q$ adalah $q \rightarrow p$.
6. **Invers** dari $p \rightarrow q$ adalah $\neg p \rightarrow \neg q$.

Beberapa implikasi logis atau argumen valid yang juga disebut aturan-aturan inferens didaftar pada Tabel 2.4.1.

Tabel 2.4.1: **Aturan-aturan Inferens**

No	Asumsi	Konklusi	Implikasi Logis	Nama
1	$p \to \text{F}$	$\neg p$	$(p \to F) \Rightarrow \neg p$	Introduksi $\neg$
2	$\neg p \to \text{F}$	p	$(\neg p \to F) \Rightarrow p$	Eliminasi $\neg$ (Kontradiksi)
3	p q	$p \wedge q$		Introduksi $\wedge$ (Konjungsi)
4	$p \wedge q$	p	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Eliminasi $\wedge$ (Simplifikasi)
5	p	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	Introduksi $\vee$
6	$p \vee q$ $\neg p$	q	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$	Eliminasi $\vee$
7	p $p \to q$	q	$(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow q$	Eliminasi $\to$ (Modus ponens)
8	$\neg q$ $p \to q$	$\neg p$	$(\neg q \wedge (p \to q)) \Rightarrow \neg p$	Modus tollens
9	$p \to q$ $q \to r$	$p \to r$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)$	Silogisme

Contoh 2.4.1

Buktikan Introduksi $\neg$ pada Aturan-aturan Inferens (Tabel 2.4.1), yaitu $(p \to \text{F}) \Rightarrow \neg p$.

Jawab:

Argumen $(p \to \text{F}) \to \neg p$ memiliki premis $p \to \text{F}$ dan konklusi $\neg p$. Evaluasi kebenaran dari argumen $(p \to \text{F}) \to \neg p$ dapat dilihat pada Table 2.4.2 yang menunjukkan bahwa argumen $(p \to \text{F}) \to \neg p$

adalah tautologi, sehingga $(p \to \mathrm{F}) \Rightarrow \neg p$ dan dikatakan bahwa $(p \to \mathrm{F})$ implikasi logis $\neg p$.

Tabel 2.4.2: Tabel kebenaran $(\neg p \to \mathrm{F}) \to p$.

p	$\neg p$	**F**	$p \to F$	$(p \to \mathrm{F}) \to \neg p$
F	T	F	T	T
F	T	F	T	T
T	F	F	F	T
T	F	F	F	T

□

Contoh 2.4.2

Buktikan Eliminasi ¬ pada Aturan-aturan Inferens (Tabel 2.4.1), yaitu $(\neg p \to \mathrm{F}) \Rightarrow p$.

Jawab:

Argumen $(\neg p \to \mathrm{F}) \to p$ memiliki premis $\neg p \to \mathrm{F}$ dan konklusi p. Tabel 2.4.3 adalah tabel kebenaran dari $(\neg p \to \mathrm{F}) \to p$ yang menunjukkan bahwa $(\neg p \to \mathrm{F}) \to p$ adalah tautologi, sehingga $(\neg p \to \mathrm{F}) \Rightarrow p$.

Tabel 2.4.3: Tabel kebenaran $(\neg p \to \mathrm{F}) \to p$.

p	$\neg p$	**F**	$\neg p \to F$	$(\neg p \to \mathrm{F}) \to p$
F	T	F	F	T
F	T	F	F	T
T	F	F	T	T
T	F	F	T	T

□

Contoh 2.4.3

Buktikan Modes ponens: $(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow p$.

Jawab:

Argumen $(p \wedge (p \to q)) \to p$ memiliki premis p dan premis $p \to q$ serta konklusi p. Evaluasi kebenaran $(p \wedge (p \to q)) \to p$ dengan tabel kebenaran dapat dilihat pada Table 2.4.4 yang menunjukkan bahwa $(p \wedge (p \to q)) \to p$ adalah tautologi, karena semua nilainya T. Dengan demikian $(p \wedge (p \to q)) \Rightarrow p$.

Tabel 2.4.4: Tabel kebenaran $(p \wedge (p \to q)) \to p$.

$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \to q}$	$\boldsymbol{p \wedge (p \to q)}$	$\boldsymbol{(p \wedge (p \to q)) \to p}$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

□

Contoh 2.4.4

Buktikan Modes ponens: $((p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q) \Rightarrow p$.

Jawab:

Argumen $((p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q) \to p$ memiliki premis $p \vee q$ dan premis $p \wedge \neg q$ serta konklusi p. Tabel 2.4.5 adalah tabel kebenaran dari $((p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q) \to p$ yang menunjukkan bahwa argumen ini adalah valid. Jadi $((p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q) \Rightarrow p$.

Tabel 2.4.5: Tabel kebenaran $((p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q) \rightarrow p$.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{\neg q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{p \wedge \neg q}$	$\boldsymbol{(p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)}$	$\boldsymbol{((p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)) \rightarrow p}$
F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T

□

2.5 Deduksi

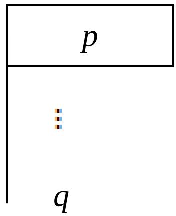
Definisi 2.5

1. **Deduksi** (*natural deduction*) adalah penarikan konklusi dari premis yang benar yang didasarkan pada aturan-aturan inferens.
2. **Derivasi** adalah rangkaian langkah yang menerapkan deduksi dan ekivalensi logis, bertolak dari apa yang diberikan atau yang diasumsikan menuju kepada konklusi atau apa yang diharapkan.

Seperti yang telah disampaikan sebelumnya, evaluasi kebenaran sebuah proposisi dapat dilakukan dengan tabel kebenaran. Namun penggunaan tabel kebenaran dalam beberapa hal tidaklah praktis; untuk evaluasi sebuah proposisi dengan n variable, kita memerlukan 2^n kombinasi nilai dan untuk evaluasi proposisi seperti $\neg(\neg((p \vee q) \wedge r) \vee \neg q) \leftrightarrow (q \wedge r)$ pada Contoh 2.3.4, diperlukan 11 kolom.

Oleh sebab itu diperlukan cara yang lebih elegan untuk mengecek kebenaran sebuah proposisi, yaitu dengan menggunakan deduksi, yang tidak lain adalah didasarkan pada implikasi logis. Sistem deduksi ini menggunakan bendera, dimana premis p

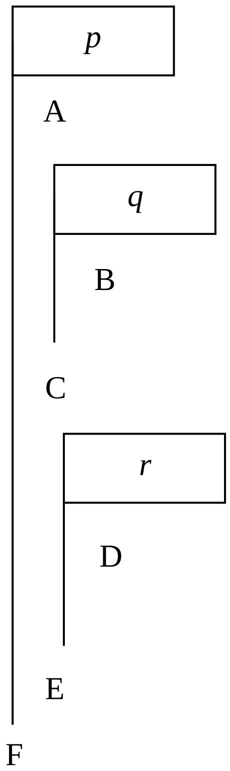
diletakkan pada benderanya, dan konklusi q yang ingin dicapai terletak pada samping bawah kanan tiang, seperti pada Gambar 2.5.1.



diasumsikan p

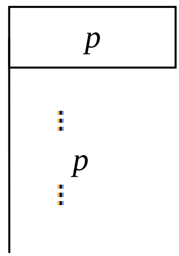
Gambar 2.5.1: Bendera.

Adapun ruang lingkup berlakunya premis adalah hanya pada daerah di bawah bendera dan di sebelah kanan tiang. Pada Gambar 2.5.2, ruang lingkup berlakunya premis p adalah di daerah A, B, C, D, dan E, namun tidak berlaku di F. Premis q hanya berlaku di daerah B saja, sedangkan premis r hanya berlaku di daerah D saja. Perhatikan bahwa daerah di dalam bendera lain bukan merupakan ruang lingkup premis di dalam bendera.



Gambar 2.5.2: Ruang lingkup premis.

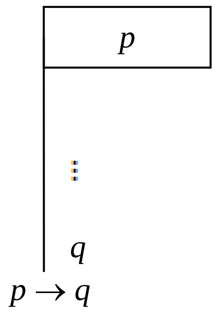
Dengan demikian maka jika proposisi p berada di dalam bendera sebagai premis, maka p juga dapat diletakkan di daerah ruang lingkupnya, seperti pada Gambar 2.5.3. Tetapi tidak diperkenankan menambahkan atau menyalin proposisi ke dalam bendera.



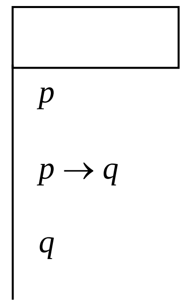
Gambar 2.5.3. Salinan premis.

Berikut beberapa aturan deduksi:

a) **Introduksi Implikasi (I→) dan Eliminasi Implikasi (E→)**
Jika premis p diletakkan di dalam bendera dan diperoleh proposisi q sebagai hasil akhir di bawah bendera, yaitu di posisi sebelah kanan paling bawah tiang, maka tepat di bawah tiang diperoleh $p \rightarrow q$ (lihat Gambar 2.5.4 (a)) Sedangkan jika dalam ruang lingkup yang sama (tidak harus berurut atau berturut, bisa juga salah satu atau keduanya berada di dalam bendera), berlaku p dan $p \rightarrow q$, maka berlaku juga q (modus ponens) (lihat Gambar 2.5.4 (b)).



(a) Introduksi Implikasi (I→)



(b) Eliminasi Implikasi (E→)

Gambar 2.5.4. Introduksi dan Eliminasi Implikasi.

b) Introduksi Disjungsi (I∨) dan Eliminasi Disjungsi (E∨)

Jika berlaku premis p, maka di dalam lingkup yang sama berlaku juga $p \lor q$ (lihat Gambar 2.5.5 (a)). Sedangkan jika pada ruang lingkup yang sama (tidak harus berurut atau berturut) berlaku $p \lor q$ dan $\neg p$, maka berlaku juga q (lihat Gambar 2.5.5 (b)).

p

$\ldots$

$p \vee q$

(a) Introduksi Disjungsi (I$\vee$)

$p \vee q$

$\ldots$

$\neg p$

$\ldots$

q

(b) Eliminasi Disjungsi (E$\vee$)

Gambar 2.5.5 Introduksi dan Eliminasi Disjungsi.

c) Introduksi Konjungsi (I$\wedge$) dan Eliminasi Konjungsi (E$\wedge$)

Jika di dalam ruang lingkup yang sama p dan juga q, maka berlaku $p \wedge q$ (lihat Gambar 2.5.6 (a)) dan jika $q = \neg p$ maka diperoleh $p \wedge \neg p$, yaitu F, sesuai dengan Hukum Invers.

Sedangkan jika berlaku $p \wedge q$, maka juga berlaku p (lihat Gambar 2.5.6 (b)).

p
$\ldots$
q
$\ldots$
$p \wedge q$

(a) Introduksi Konjungsi (I$\wedge$)

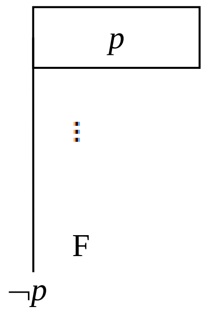
$p \wedge q$
$\ldots$
p

(b) Eliminasi Konjungsi (E$\wedge$)

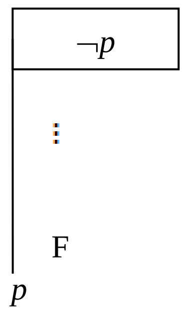
Gambar 2.5.6 Introduksi dan Eliminasi Konjungsi.

d) Introduksi Negasi (I¬) dan Eliminasi Negasi (E¬)

Jika premis *p* diletakkan di dalam bendera dan di bawah bendera diperoleh F, maka di bawah tiang bendera diperoleh ¬*p* (lihat Gambar 2.5.7 (a)). Sedangkan jika di dalam bendera diletakkan ¬*p* dan di bawah bendera diperoleh F, maka di bawah tiang bendera diperoleh *p* (lihat Gambar 2.5.7 (b)).



(a) Introduksi Negasi (I¬)



(b) Eliminasi Negasi (I¬)

Gambar 2.5.7 Introduksi dan Eliminasi Negasi.

e) Introduksi Bikondisional (I↔) dan Eliminasi Bikondisional (E↔)

Bikondisional $p \leftrightarrow q$ adalah konjungsi $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$. Sehingga introduksi dan eliminasinya mirip dengan konjungsi.

$$p \rightarrow q$$
$$\ldots$$
$$q \rightarrow p$$
$$p \leftrightarrow q$$

(a) Introduksi Bikondisional (I↔)

$$p \leftrightarrow q$$
$$\ldots$$
$$p \rightarrow q$$

(b) Eliminasi Bikondisional (E↔)

Gambar 2.5.8 Introduksi dan Eliminasi Bikondisional.

Contoh 2.5.1

Buktikan Silogisme: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$.

<u>Jawab</u>:

Kita asumsikan $(p \to q) \wedge (q \to r)$ dan letakkan di dalam bendera dan kita lakukan derivasi untuk mendapatkan $p \to r$.

1.	$\boxed{(p \to q) \wedge (q \to r)}$	
2.	$\boxed{p}$	
3.	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	Salin 1
4.	p	Salin 2
5.	$p \to q$	E$\wedge$ 3
6.	q	E$\to$ 4, 5
7.	$q \to r$	E$\wedge$ 3
8.	r	E$\to$ 6, 7
9.	$p \to r$	I$\to$ 2, 8
10.	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$	I$\to$ 1, 9

Dengan demikian telah terbukti bahwa $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow$ $(p \to r)$.

□

Contoh 2.5.2

Buktikan: $(((\neg p \vee \neg q) \to (r \wedge s)) \wedge (r \to t) \wedge \neg t) \Rightarrow p$.

<u>Jawab</u>:

Dengan mengasumsikan $(((\neg p \vee \neg q) \to (r \wedge s)) \wedge (r \to t) \wedge \neg t)$ dan meletakkannya di dalam bendera, kita kemudian lakukan derivasi untuk dapatkan p di bawah bendera, sebagai berikut:

1.	$((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)) \wedge (r \rightarrow t) \wedge \neg t$	
2.	$\neg p$	
3.	$\neg p \vee \neg q$	I$\vee$ 2
4.	$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$	E$\wedge$ 1
5.	$r \wedge s$	E$\rightarrow$ 3, 4
6.	r	E$\wedge$ 5
7.	$(r \rightarrow t) \wedge \neg t$	E$\wedge$ 1
8.	$r \rightarrow t$	E$\wedge$ 7
9.	t	E$\rightarrow$ 6, 8
10.	$\neg t$	E$\wedge$ 7
11.	F	I$\wedge$ 9, 10
12.	p	E$\neg$ 2, 11
13.	$(((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)) \wedge (r \rightarrow t) \wedge \neg t) \rightarrow p$	I$\rightarrow$ 1, 12

Jadi terbukti bahwa $(((\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)) \wedge (r \rightarrow t) \wedge \neg t) \Rightarrow p$.
□

Perhatikan bahwa pada Contoh 2.5.2, F pada baris ke 11, diperoleh dari Introduksi Disjungsi I$\wedge$ 9, 10, yaitu $t \wedge \neg t$ dengan menerapkan Hukum Invers.

Contoh 2.5.3

Buktikan: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ (kontrapositif).

Jawab:

Kita lakukan derivasi untuk $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ dan kemudian $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$, selanjutnya kita terapkan introduksi bikondisional untuk memperoleh $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

1.	$p \to q$	
2.	$\neg q$	
3.	p	
4.	q	E$\to$ 1, 3
5.	F	I$\wedge$ 2, 4
6.	$\neg p$	I$\neg$ 3, 5
7.	$\neg q \to \neg p$	I$\to$ 2, 6
8.	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	I$\to$ 1, 7
9.	$\neg q \to \neg p$	
10.	p	
11.	$\neg q$	
12.	$\neg p$	E$\to$ 9,11
13.	F	I$\wedge$ 10, 12
14.	q	E$\neg$ 11, 13
15.	$p \to q$	I$\to$ 10, 14
16.	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	I$\to$ 9, 15
17.	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$	I$\leftrightarrow$ 8, 16

2.6 Kalkulus Predikat

Definisi 2.6

1. **Predikat** adalah pernyataan yang mengandung variabel dan nilai kebenaran predikat tergantung pada nilai variabel tersebut.
2. **Domain** dari variabel x adalah kumpulan nilai yang bisa dimiliki oleh x.
3. $\boldsymbol{(\forall x : D(x) : P(x))}$ disebut **kuantifikasi universal** dan dibaca "Untuk semua x yang memenuhi $D(x)$, berlaku $P(x)$". Simbol $\forall$ disebut **kuantor universal**, variabel x disebut **dummy**, predikat $D(x)$ disebut predikat domain dari x, dan $P(x)$ adalah predikat yang mengandung variabel x.
   $\boldsymbol{(\forall x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow \mathrm{T}}$, jika untuk semua x yang memenuhi $D(x)$, nilai $P(x) = \mathrm{T}$.
4. $\boldsymbol{(\exists x : D(x) : P(x))}$ disebut **kuantifikasi eksistensi** dan dibaca "Ada x yang memenuhi $D(x)$, berlaku $P(x)$". Simbol $\exists$ disebut **kuantor eksistensi**, predikat $D(x)$ disebut predikat domain dari x, dan $P(x)$ adalah predikat yang mengandung variabel x.
   $\boldsymbol{(\exists x : D(x) : P(x)) = \mathrm{T}}$, jika terdapat x yang memenuhi $D(x)$, sehingga $P(x) = \mathrm{T}$.

Sifat-sifat 2.6 (Hubungan Antara Kuantifikasi Universal dan Eksistensi)

1. $(\forall x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x : D(x) : \neg P(x))$
2. $(\exists x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow \neg(\forall x : D(x) : \neg P(x))$
3. $\neg(\forall x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : D(x) : \neg P(x))$
4. $\neg(\exists x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : D(x) : \neg P(x))$

Contoh 2.6.1

Berikut ini adalah predikat:

$P(x)$: $x + 2 = 5$.

$Q(x, y)$: $x - y < 3$.

$R(x, y, z)$: $x + y \geq z + 4$.

Nilai $P(3)$ = T, sedangkan $P(1)$ = F.

Nilai $Q(10, 1)$ = T, tapi $Q(14, 2)$ = F.

Nilai $R(3, 4, 1)$ = T, namun $R(1, 2, 3)$ = F.

Jika A adalah kumpulan bilangan 1, 2, dan 3, ditulis dengan $A = \{1, 2, 3\}$, yang bisa dimiliki oleh variable x, maka A adalah domain dari x. Predikat $x \in A$ adalah predikat domain dari x.

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $D(x)$ adalah $x \in A$, maka:

- $(\forall x : D(x) : P(x))$, yaitu $(\forall x : x \in A: x + 2 = 5)$, bernilai F, karena tidak semua nilai x membuat $P(x)$ bernilai T, yaitu $P(1)$ = F (tidak benar bahwa $1 + 2 = 5$).
- $(\forall x, y : D(x, y) : Q(x, y))$, yaitu $(\forall x, y : x, y \in A : x - y < 3)$, bernilai T, karena semua pasangan nilai di A, belaku $x - y < 3$.
- $(\forall x, y, z : x, y, z \in A: R(x, y, z))$, yaitu $(\forall x, y, z : x, y, z \in A: x + y \geq z + 4)$, bernilai F, karena tidak semua $x, y, z \in A$ memenuhi $R(x, y, z)$. Misalkan, $R(1, 2, 3)$ = F.
- $(\exists x : x \in A: P(x))$, yaitu $(\exists x : x \in A: x + 2 = 5)$ bernilai T, karena ada x anggota A yang membuat $P(x)$ = T, yaitu $x = 3$ yang memenuhi $x + 2 = 5$.
- $(\exists x, y : x, y \in A: Q(x, y)) \equiv (\exists x, y : x, y \in A: (x - y < 3)$ bernilai T, karena semua pasangan nilai di A, belaku $x - y < 3$. Jadi ada x dan y yang membuat $Q(x, y)$ = T.
- $(\exists x, y, z : x, y, z \in A: R(x, y, z)) \equiv (\exists x, y, z : x, y, z \in A: (x + y \geq z + 4)$ bernilai F, karena tidak ada $x, y, z \in A$ yang memenuhi $R(x, y, z)$.

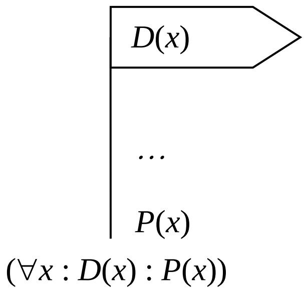
□

Aturan deduksi untuk kuantifikasi universal dan kuantifikasi eksistensi adalah:

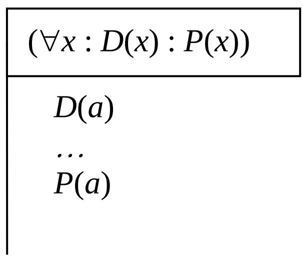
a) **Introduksi Kuantor Universal (I∀) dan Eliminasi Kuantor Universal (E∀)**

Biarkan predikat domain $D(x)$ di dalam bendera runcing. Jika diperoleh predikat $P(x)$ sebagai hasil akhir di bawah bendera, yaitu di posisi sebelah kanan paling bawah tiang, maka tepat di bawah tiang diperoleh $(\forall\ x : D(x) : P(x))$ (lihat Gambar 2.6.1 (a))..

Sedangkan jika diasumsikan $(\forall\ x : D(x) : P(x))$ di dalam bendera biasa, dan berlaku $D(a)$, maka dapat disimpulkan $P(a)$ (lihat Gambar 2.6.1 (b)). Sebagai gambaran, bilamana $(\forall\ x : x \in \mathbb{N} : x < x + 1)$ dan karena $2 \in$ N, maka $2 < 2 + 1$.



(a) Introduksi Kuantor Universal (I∀)



(a) Eliminasi Kuantor Universal (I∀)

Gambar 2.6.1: Introduksi dan Eliminasi Kuantor Universal.

b) Introduksi Kuantor Eksistensi (I∃) dan Eliminasi Kuantor Eksistensi (E∃)

Jika belaku predikat $P(a)$ dan berlaku $D(a)$, maka dapat disimpulkan $(\exists x: D(x) : P(x))$ (lihat Gambar 2.6.2 (a)). Sebagai gambaran, $2 < 3$ dan karena $3 \in \mathbb{N}$, maka kita disimpulkan $(\exists x: x \in \mathbb{N}: x < 3)$.

Eliminasi eksistensi agak rumit. Aturannya sebagai berikut: Jika berlaku $(\exists x\colon D(x) : P(x))$ dan $P(a) \to Q$ di mana a tidak muncul di Q, maka juga berlaku Q (lihat Gambar 2.6.2 (b)).

$P(a)$
$\ldots$
$D(a)$
$(\exists\, x : D(x) : P(x))$

(a) Introduksi Kuantor Eksistensi (I∃)

$(\exists x : D(x) : P(x))$
$. \; . \; .$
$P(a) \to Q$
Q

(a) Eliminasi Kuantor Eksistensi (E∃)

Gambar 2.6.2: Introduksi dan Eliminasi Kuantor Eksistensi.

Contoh 2.6.2

Buktikan: $(\forall x : D(x) : P(x) \wedge Q(x) \rightarrow P(x))$.

<u>Jawab</u>:

Derivasinya adalah sebagai berikut:

1.	$D(x)$	
2.	$P(x) \wedge Q(x)$	
3.	$P(x)$	E$\wedge$ 2
4.	$(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow P(x)$	I$\rightarrow$ 2, 3
	$(\forall x : D(x) : (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow P(x))$	I$\forall$ 1, 4

Jadi terbukti $(\forall x : D(x) : P(x) \wedge Q(x) \rightarrow P(x))$.

□

Contoh 2.6.3

Buktikan: $(\forall x : D(x) : D(x) \wedge P(x)) \Leftrightarrow (\forall y : D(y) : P(y))$.

<u>Jawab</u>:

Kita lakukan derivasi untuk $(\forall x : D(x) : D(x) \wedge P(x)) \rightarrow (\forall y : D(y) : P(y))$ dan kemudian konversnya, yaitu $(\forall y : D(y) : P(y)) \rightarrow (\forall x : D(x) : D(x) \wedge P(x))$.

1.	$(\forall x : D(x) : D(x) \wedge P(x))$	
2.	$D(y)$	
3.	$D(y) \wedge P(y)$	E$\forall$1, 2
4.	$P(y)$	E$\wedge$ 3
5.	$(\forall y : D(y) : P(y))$	I$\forall$ 2, 4
6.	$(\forall x : D(x) : D(x) \wedge P(x)) \rightarrow (\forall y : D(y) : P(y))$	I$\rightarrow$ 1, 5

Konversnya adalah:

7.	$(\forall y : D(y) : P(y))$	
8.	$D(x)$	
9.	$P(x)$	E$\forall$ 7, 8
10.	$D(x) \wedge P(x)$	I$\wedge$ 8, 9
11.	$(\forall y : D(y) : D(y) \wedge P(y))$	I$\forall$ 8, 10
12.	$(\forall y : D(y) : P(y)) \rightarrow (\forall x : D(x) : D(x) \wedge P(x))$	I$\rightarrow$ 7, 11
13.	$(\forall x : D(x) : D(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow (\forall y : D(y) : P(y))$	I$\leftrightarrow$ 6, 12

Jadi terbukti $(\forall x : D(x) : D(x) \wedge P(x)) \Leftrightarrow (\forall y : D(y) : P(y))$.

□

Contoh 2.6.4

Buktikan: $(\forall x : x \in \mathbb{N} : x \leq 2x) \Rightarrow (\exists x : x \in \mathbb{N} : x \leq 2x)$.

<u>Jawab</u>:

Derivasinya adalah sebagai berikut:

1.	$(\forall x : x \in \mathbb{N} : x \leq 2x)$	
2.	$5 \in \mathbb{N}$	Definisi $\mathbb{N}$.
3.	$5 \leq 2 \times 5$	Kalkulus
4.	$(\exists x : x \in \mathbb{N} : x \leq 2x)$	I$\exists$ 2, 3
	$(\forall x : x \in \mathbb{N} : x \leq 2x) \rightarrow (\exists x : x \in \mathbb{N} : x \leq 2x)$	I$\rightarrow$ 1, 4

Jadi terbukti $(\forall x : x \in \mathbb{N} : x \leq 2x) \Rightarrow (\exists x : x \in \mathbb{N} : x \leq 2x)$.

2.7 Latihan Soal 2

2.1. Manakah di antara kalimat berikut yang merupakan proposisi?

a. Hari ini Selasa.
b. Dewi cantik.
c. Saya bisa terbang ke bulan.
d. $2 + 3 = 0$.
e. Tuliskan ini!
f. Jika belajar, pasti lulus.
g. $x = y$.

2.2. Manakah di antara kalimat berikut yang merupakan proposisi primitif?

a. Jika $x = 2$, maka $x + 3 = 5$.
b. Jumlah dua bilangan ganjil adalah genap.
c. Jika p dan q ganjil, maka $p + q$ genap.
d. Empat dari lima mahasiswa adalah wanita.
e. Budi tinggi tapi kurus.
f. Alo ke kebun atau ke kampus.
g. Utu tidak lulus.

2.3. Tentukan negasi dari kalimat-kalimat berikut:

a. Ini buah apel.
b. Itu bukan Budi.
c. Utu pergi ke kampus dan Ani pergi ke pasar.
d. Alo lulus tapi Mien tidak lulus.
e. Jika hari hujan maka dia pergi ke kampus.
f. Joko membeli buku atau pensil.

2.4. Ekspresikan proposisi berikut sebagai proposisi majemuk dari proposisi-proposisi primitif p dan q. Definisikan terlebih dahulu mendefinisikan p dan q.

a. Bilangan 0 bukan positif.
b. Bilangan 2 adalah genap dan prima.
c. Jika 4 bukan bilangan prima, maka 3 bilangan prima.

d. $2 < 3$ atau $3 > 2$.
e. 4 adalah ganjil jika dan hanya jika 3 adalah genap.
f. 2 bukan ganjil tapi prima.

2.5. Gunakan tabel kebenaran untuk membuktikan hukum-hukum logika pada Tabel 2.3.1:
a. Negasi Ganda.
b. Idempoten.
c. Dominasi.
d. Identitas.
e. Invers.
f. Komutatif.
g. Asosiatif.
h. Distributif.
i. De Morgan: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.
j. Ekivalensi.

2.6. Gunakan tabel kebenaran untuk menentukan mana di antara proposisi berikut ini yang tautologi, kontradiksi, atau bukan keduanya:
a. $p \vee (q \wedge \neg p)$.
b. $\neg p \wedge (q \vee \neg p) \vee (p \wedge q)$.
c. $(p \vee q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg s)$.

2.7. Gunakan tabel kebenaran untuk mengevaluasi nilai kebenaran dari implikasi-implikasi berikut:
a. $\neg p \to (p \to q)$.
b. $((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$.
c. $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$.
d. $((p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r)) \to (q \vee s)$.
e. $(p \to (q \leftrightarrow \neg r)) \to (p \vee q)$.

2.8. Untuk masing-masing porposisi pada Soal 2.7, tentukan:
a. Konvers.
b. Invers.

c. Kontrapositif

2.9. Gunakan hukum-hukum logika untuk membuktikan ekivalensi logis berikut:

a. $(p \vee (p \wedge (p \vee q))) \Leftrightarrow p$.

b. $(\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg s \wedge p)) \Leftrightarrow p$.

c. $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$.

d. $((p \vee q) \rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r))$.

e. $(\neg(p \leftrightarrow q)) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p))$.

f. $((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)$.

2.10. Gunakan tabel kebenaran untuk membuktikan aturan-aturan inferens (Tabel 2.4.1):

a. Eliminasi $\wedge$.

b. Introduksi $\vee$.

c. Eliminasi $\vee$.

d. Modus tollens.

2.11. Gunakan deduksi untuk membuktikan implikasi logis berikut:

a. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

b. $(\neg(p \wedge q) \wedge (\neg r \rightarrow q)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$.

c. $(\neg p) \Rightarrow (p \rightarrow q)$.

d. $(p \rightarrow q) \Rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee r))$.

e. $(\neg p \wedge (p \wedge q)) \Rightarrow q$.

f. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$.

g. $((p \rightarrow r) \wedge (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s)) \Rightarrow (\neg r \rightarrow s)$.

h. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow (r \vee s)) \wedge (\neg r \vee (\neg t \vee u)) \wedge (p \wedge t)) \Rightarrow u$.

i. $((\neg p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \neg r) \Rightarrow p$.

j. $((u \rightarrow r) \wedge ((r \wedge s) \rightarrow (p \vee t)) \wedge (q \rightarrow (u \wedge s)) \wedge \neg t) \Rightarrow (q \rightarrow p)$.

2.12. Gunakan deduksi untuk membuktikan ekivalensi logis berikut:

a. $(p \to q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \to \neg p)$.

b. $(p \to (r \to q)) \Leftrightarrow (r \vee q)$.

c. $(p \to q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q)) \Leftrightarrow (\neg(q \vee p))$.

d. $(p \to (p \to r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \to r)$.

e. $\neg(\neg((p \vee q) \wedge r) \vee \neg q) \Leftrightarrow (q \wedge r)$.

2.13. Konversi kalimat-kalimat berikut ke dalam bentuk $(\forall x : D(x) : P(x))$ di mana $D(x)$ adalah predikat domain dan $P(x)$ adalah predikat ekspresi:

a. Semua bilangan asli lebih besar dari nol.

b. Semua bilangan asli berlaku jika dikalikan dua, akan lebih besar daripada dirinya.

c. Semua bilangan prima kecuali bilangan 2 adalah ganjil.

2.14. Tentukan nilai dari:

a. $(\forall x : x \in \mathbb{N} : x \leq 2x)$.

b. $(\forall x : x \in \mathbb{Z} : x \leq 2x)$.

Bab 3
Teori Himpunan

All fixed set patterns are incapable of adaptability or pliability.
The truth is outside of all fixed patterns.
Bruce Lee (1940 – 1973).
Chinese/American Philosopher, Martial Artist and Movie Star.

Himpunan (*set*) dianggap sebagai salah satu konsep dasar matematika. Praktis, setiap kali berbicara tentang matematika, kemungkinan besar tercakup di dalamnya konsep himpunan. Di awal buku ini, kita berbicara tentang "kumpulan", yang sebenarnya kita berbicara tentang himpunan.

Studi modern tentang himpunan (*set theory*) dimulai oleh ahli matematika Jerman yang lahir di Rusia, Georg Cantor (1845 – 1918) yang kemudian dikembangkan oleh bebarapa ahli, antara lain oleh ahli logika Inggris, John Venn (1834 – 1923) yang memperkenalkan diagram Venn pada tahun 1881.

Dalam bab ini kita akan membahas, pengertian dan notasi himpunan, berbagai macam penyajian himpunan, diagram Venn, himpunan bagian dan himpunan kuasa, berbagai operasi himpunan, serta hukum dan pembuktian dalam teori himpunan dengan menggunakan tabel keanggotaan, hukum-hukum himpunan, dan deduksi logika.

Diharapkan setelah mempelajari bab ini, pembaca dapat menjelaskan pengertian himpunan, dapat menyajikan sebuah himpunan dengan berbagai cara, dapat menentukan himpunan bagian dan himpunan kuasa suatu himpunan, mampu melakukan operasi himpunan, menguasai hukum-hukum himpunan, serta dapat membuktikan pernyataan tentang himpunan dengan menggunakan tabel keanggotaan serta menerapkan hukum-hukum himpunan dan deduksi logika.

3.1 Definisi dan Notasi

Definisi 3.1

1. Sebuah **himpunan** adalah kumpulan objek yang didefinisikan dengan baik.
2. Individu dari sebuah himpunan A dinamakan **anggota** dari A. Jika x adalah anggota dari himpunan A, maka ditulis $x \in A$ dan jika x bukan anggota dari himpunan A, maka ditulis $x \notin A$.
3. **Kardinalitas** atau **ukuran** $|A|$ dari himpunan berhingga A adalah banyaknya anggota dari A.
4. Jika sebuah himpunan tidak memiliki anggota, maka disebut **himpunan kosong**, dan ditulis $\varnothing$.
5. **Himpunan Semesta** $\mathscr{U}$ (*universal set*) adalah himpunan yang mencakup semua anggota himpunan yang sedang dibicarakan.

Sifat-sifat 3.1

Misalkan $\mathcal{U}$ adalah semesta dan $A \subseteq \mathcal{U}$. Maka:

1. $x \in \varnothing \Leftrightarrow$ F.
2. $x \in \mathcal{U} \Leftrightarrow$ T.
3. $|\varnothing| = 0$.

Yang dimaksud dengan ”didefinisikan dengan baik” adalah bahwa kita dapat menentukan secara objektif anggota-anggota himpunan tersebut. Ini juga berarti kriteria keanggotaan dan ruang lingkupnya jelas, sehingga tidak tergantung pada interpretasi individu, tempat ataupun waktu.

Contoh 3.1.1

- ”Kumpulan orang-orang yang paling dicintai” bukan sebuah himpunan karena orang-orang yang paling dicintai bagi setiap orang bisa berbeda-beda.
- ”Kumpulan gadis-gadis yang cantik” bukan sebuah himpunan karena kriteria cantik tidaklah jelas.
- ”Kumpulan anak-anak umur empat tahun” bukan sebuah himpunan karena tidak jelas anak-anak umur empat tahun pada waktu kapan.
- ”Kumpulan nama-nama hari yang dimulai dari S” adalah himpunan yang terdiri dari tiga anggota, yaitu Senin, Selasa, dan Sabtu.
- ”Kumpulan bilangan prima genap” adalah himpunan yang terdiri dari satu anggota yaitu bilangan 2.
- Jika A adalah ”Kumpulan bilangan ganjil kurang dari lima”, maka $3 \in A$ dan $2 \notin A$.

- Jika B adalah ”Kumpulan bilangan ganjil yang habis dibagi oleh dua”, maka B adalah himpunan yang tidak memiliki anggota; $B = \varnothing$.
- Jika A adalah himpunan bilangan ganjil dan B adalah himpunan bilangan genap, dan C adalah himpunan beranggotakan -1 dan -2, maka himpunan semesta yang mungkin untuk ini adalah himpunan bilangan Bulat.
- Jika himpunan A beranggotakan 3, 4, 5, 6, dan 7, maka $|A| = 5$.

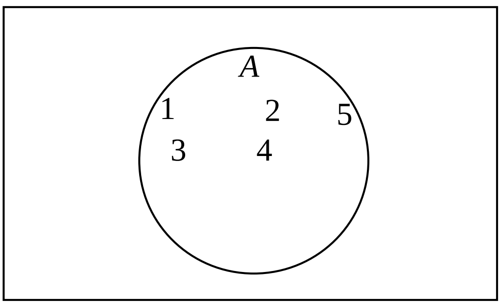
□

Kita akan menggunakan huruf besar untuk himpunan seperti *A*, *B*, *C*, dan huruf kecil untuk anggota himpunan, seperti *a*, *b*, *c*. Himpunan dapat disajikan dengan berbagai cara berikut:

1. Menggunakan Deskripsi.
   Himpunan dapat dinyatakan dengan menggunakan kata-kata, seperti: A adalah himpunan bilangan asli kurang dari enam.

2. Menggunakan Enumerasi.
   Himpunan dapat juga dinyatakan dengan cara mendaftarkan semua anggotanya di antara kurung kurawal {......}. Para anggota himpunan dipisahkan oleh koma, anggota yang sama hanya ditulis sekali, dan urutan penulisan anggota tidaklah penting. Misalnya himpunan A memiliki anggota 1, 2, 3, 4, dan 5, maka ditulis $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Mendaftarkan semua anggota himpunan tidaklah mudah jika himpunan tersebut memiliki anggota yang banyak. Untuk itu kita menggunakan notasi tiga titik “. . .” yang mengindikasikan anggota-anggota sebelumnya/selanjutnya mengikuti pola yang telah ada sebelum/ sesudah itu. Untuk himpunan berhingga misalnya $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$ dan untuk himpunan tak-hingga misalnya $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ dan $\{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$.

3. Menggunakan Karakterisasi.
   Himpunan dapat pula dinyatakan dengan notasi { $E(x) \mid S(x)$ }, yaitu dengan mendefinisikan ekspresi $E(x)$ yang memiliki sifat atau memenuhi syarat $S(x)$. Adapun tanda "|" dibaca "dimana", seperti pada $A = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$, yang adalah himpunan $x + 1$ dimana $x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5$. Himpunan ini sama dengan {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
   Jika ditulis { $x \mid S(x)$ }, maka yang dimaksud adalah { $x \mid x \in \mathscr{U} \wedge S(x)$ }.
4. Menggunakan Diagram Venn.
   Himpunan dapat juga dinyatakan dengan menggunakan diagram Venn. Meskipin penyajian dengan diagram Venn terbatas pada himpunan dengan banyaknya anggota yang tidak terlalu banyak. Sebuah diagram Venn dirancang sebagai berikut: Himpunan semesta $\mathscr{U}$ disajikan dalam bentuk persegi panjang dan himpunan A yang menjadi fokus disajikan dalam bentuk lingkaran atau kurva tertutup lainnya, di dalam persegi panjang $\mathscr{U}$. Adapun anggota-anggota himpunan A ditulis di dalam lingkaran atau kurva tertutup A. Misalkan himpunan semesta $\mathscr{U} = \mathbb{N}$ dan himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5}, maka diagram Venn himpunan A disajikan sebagai berikut:



Kumpulan bilangan yang didefinisikan di Bab 1 adalah himpunan bilangan, yaitu:

- $\mathbb{N}^{+} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$adalah himpunan bilangan **Asli**.
- $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$adalah himpunan bilangan **Cacah**.
- $\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$ adalah himpunan bilangan **Bulat**.
- $\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \}$ adalah himpunan bilangan **Rasional**.
- $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan **Nyata**.
- $\mathbb{C}$ adalah himpunan bilangan **Kompleks**.

Contoh 3.1.2

Misalkan himpunan semesta $\mathscr{U} = \mathbb{N}$. Konversikan himpunan dengan deskripsi berikut ke dalam notasi enumerasi dan notasi karakterisasi:

a) A = ”Himpunan bilangan genap”.
b) B = ”Himpunan bilangan ganjil”.
c) C = ”Himpunan bilangan ganjil yang kurang dari sepuluh”.
d) D = ”Himpunan lima bilangan kuadrat kurang dari sepuluh”

Jawab:

Notasi enumerasi:

a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$.
b) $B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.
c) $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
d) $D = \{0, 1, 4, 9\}$.

Notasi karakterisasi:

a) $A = \{2x \mid x \in \mathscr{U}\}$.

b) $B = \{2x + 1 \mid x \in \mathscr{U}\}$.

c) $C = \{2x - 1 \mid x \in \mathscr{U} \wedge x < 10\}$.

d) $D = \{x^2 \mid x \in \mathscr{U} \wedge x^2 \leq 10\} = \{x^2 \mid x \in \mathscr{U} \wedge x \leq 3\}$.

□

Contoh 3.1.3

Konversikan himpunan dengan notasi enumerasi berikut ke dalam notasi karakterisasi dan dalam deskripsi:

a) $A = \{3x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq x < 5\}$.

b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (\exists y : y \in \mathbb{N} : xy = 24)\}$.

c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 10 \wedge (y \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{N} \wedge$
$yz = x \rightarrow (y = 1 \wedge z = x) \vee (y = x \wedge z = 1)\}$.

Jawab:

Notasi karakterisasi:

a) $A = \{0, 3, 6, 9, 12\}$.

b) $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

c) $C = \{2, 3, 5, 7\}$.

Deskripsi himpunan:

- A = ”Himpunan kelipatan tiga dari bilangan cacah kurang dari lima”.
- B = ”Himpunan pembagi positif dari dua puluh empat”.
- C = ”Himpunan bilangan prima paling besar sepuluh”.

□

3.2 Himpunan Bagian dan Himpunan Kuasa

Definisi 3.2

1. Jika A dan B adalah himpunan dalam semesta $\mathscr{U}$, dan setiap anggota A adalah juga merupakan anggota B, maka dikatakan bahwa himpunan A adalah **himpunan bagian** (*subset*) dari himpunan B, dan dinotasikan dengan $A \subseteq B$. Himpunan A bukan himpunan bagian himpinan B dinotasikan dengan $A \not\subseteq B$.
2. Jika $A \subseteq B$ dan B memiliki anggota yang tidak ada di A, maka A adalah **himpunan bagian sempurna**, $A \subset B$. Notasi untuk A bukan himpunan bagian sempurna B adalah $A \not\subset B$.
3. $A = B$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.
4. Misalkan $\mathscr{U}$ adalah semesta dan $A \subseteq \mathscr{U}$. Maka **himpunan kuasa** $\mathscr{P}(A)$ dari A adalah himpunan yang beranggotakan semua himpunan bagian dari A.

Sifat-sifat 3.2

Misalkan $\mathscr{U}$ adalah semesta dan A, B, $C \subseteq \mathscr{U}$. Maka:

1. $\varnothing \subseteq A$.
2. $A \cap B \subseteq A$.
3. $A \subseteq A \cup B$.
4. $A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$.
5. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.
6. $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$.
7. $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Perhatikan bahwa pada Definisi 3.2,

- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x : x \in \mathscr{U} : x \in A \to x \in B)$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

Contoh 3.2.1

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
Maka

- $A \subseteq B$.
- $\{1\} \subseteq A$
- $\{1, 2\} \subseteq A$
- $A \subset B$
- $\{1, 4\} \not\subseteq A$.
- $\{1, 4\} \subseteq B$.

dan

$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$.

□

Contoh 3.2.2

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \{1\}, \{1, 2\}\}$,
$B = \{1, 2, 3\}$, dan
$C = \{5, 6, \{1, 2, 3\}\}$.

Maka

- $|A| = 8$, $|B| = 3$, dan $|C| = 3$.
- $\{1\} \in A$ dan $\{1\} \subseteq A$.
- $B \subseteq A$ dan $B \in C$.
- $\{1, 2\} \in A$ dan $\{1, 2\} \subseteq A$.
- $B \subset A$.
- $B \notin A$.
- $B \in C$ dan $\{B\} \subseteq C$ tapi $B \not\subseteq C$.

dan

$\mathscr{P}(C) = \{\varnothing, \{5\}, \{6\}, \{\{1, 2, 3\}\}, \{5, 6\}, \{5, \{1, 2, 3\}\}, \{6, \{1, 2, 3\}\}, C\}$.

□

Contoh 3.2.3

Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{1, 2\}$ maka $A \subseteq B$, namun tidak ada anggota B yang bukan anggota A sehingga tidak benar $A \subset B$.

□

3.3 Operasi Himpunan

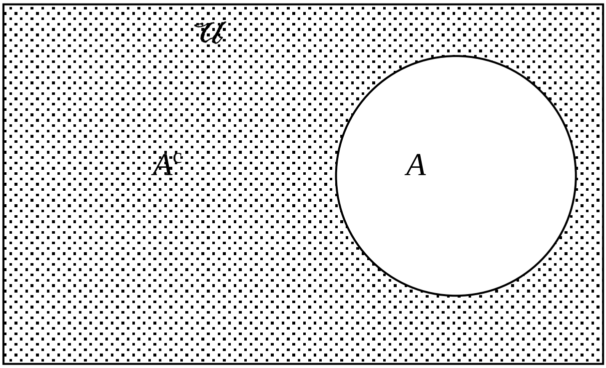
Definisi 3.3

Misalkan $\mathcal{U}$ adalah semesta dan $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Maka didefinisikan operasi-operasi berikut ini:

1. $A^c = \mathcal{U} - A = \{ x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A \}$, **komplemen** dari himpunan A.
2. $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$, **gabungan** himpunan A dan himpunan B.
3. $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$, **irisan** himpunan A dan himpunan B.
4. $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$, **beda** himpunan A dan himpunan B.
5. $A \,\Delta\, B = \{ x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B \}$, **beda simetris** himpunan A dan B.
6. Himpunan A dan himpunan B dinamakan disjoin jika $A \cap B = \varnothing$.

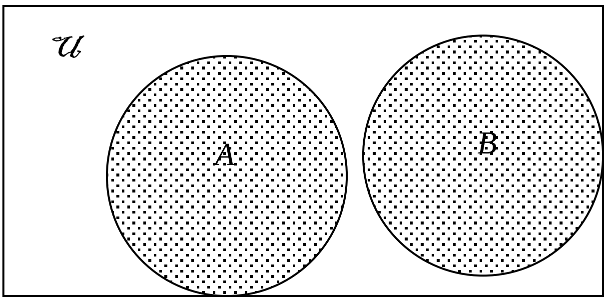
untuk mengetahui keanggotaan masing-masing operasi dan menghitung kardinalitasnya.

Gambar 3.3.1, menyajikan A dan komplemennya A^c. Himpunan A adalah daerah dalam lingkaran yang putih sedangkan A^c adalah daerah yang diarsir. Dari gambar ini dapat dilihat bahwa $A \cup A^c = \mathcal{U}$ dan $A \cap A^c = \varnothing$, sehingga dengan menggunakan aturan penjumlahan, diperoleh $|A| + |A^c| = |\mathcal{U}|$ atau $|A^c| = |\mathcal{U}| - |A|$.



Gambar 3.3.1: A dan A^c

Gambar 3.3.2 menunjukkan gabungan $A \cup B$ himpunan A dan himpunan B tanpa ada irisan. $A \cup B$ adalah daerah yang diarsir. Dapat dilihat bahwa $|A \cup B| = |A| + |B|$, namun ini dengan ketentuan bahwa $\mathcal{U}$ haruslah semesta berhingga.

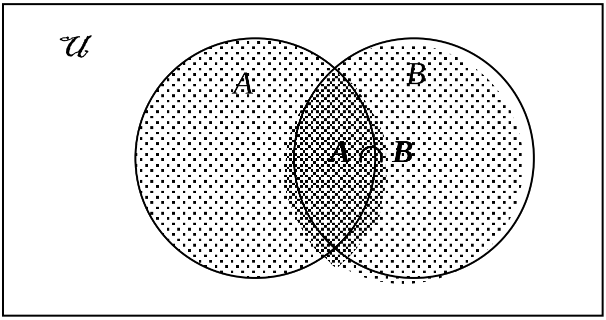


Gambar 3.3.2: Gabungan A dan B tanpa irisan.

Gabungan $A \cup B$ antara himpunan A dan himpunan B yang memiliki irisan $A \cap B$ ditunjukkan pada Gambar 3.3.3. Daerah $A \cup$

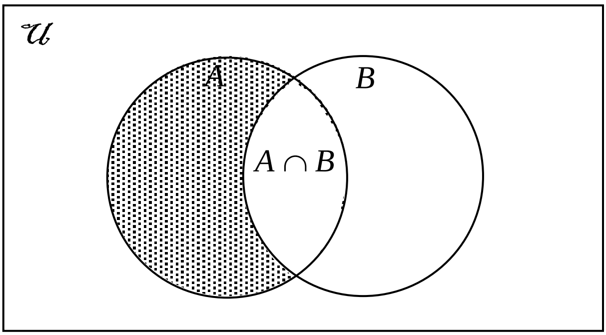
B adalah semua arsiran sedangkan irisan $A \cap B$ ditunjukkan dengan arsiran yang lebih gelap. Pada situasi ini

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Gambar 3.3.3: Gabungan A dan B dengan irisan.

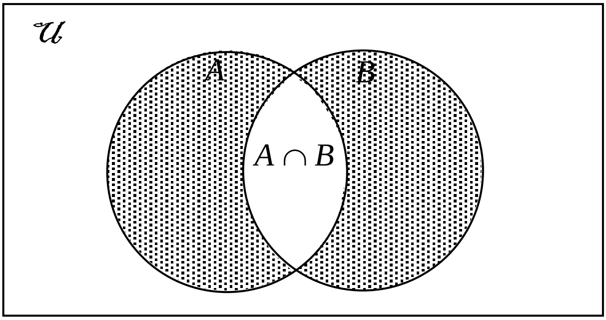
Arsiran pada Gambar 3.3.4 menunjukkan beda $A - B$ antara himpunan A dan himpunan B. Kardinalitas $|A - B| = |A| - |A \cap B|$.



Gambar 3.3.4: Beda $A - B$.

Sedangkan arsiran pada Gambar 3.3.5 adalah beda simetris $A \Delta B$ antara himpunan A dan himpunan B. Kardinalitas

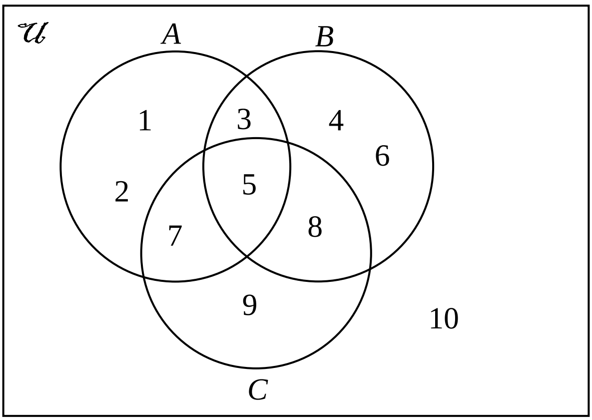
$$|A \Delta B| = |A \cup B| - |A \cap B|.$$



Gambar 3.3.5: Beda simetris $A \Delta B$.

Contoh 3.3.1

Misalkan $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 8\}$, dan $C = \{5, 7, 8, 9\}$. Penyajian dalam bentuk diagram Venn dapat dilihat pada Gambar 3.3.6.



Gambar 3.3.6: Himpunan A, B, dan C pada Contoh 3.3.1.

Maka:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dan $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

- $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- $A \cap B = \{3, 5\}$, $B \cap C = \{5, 8\}$, dan $A \cap C = \{5, 7\}$.
- $A \cap B \cap C = \{5\}$ dan $(A \cup B \cup C)^c = \{10\}$
- $A - B = \{1, 2, 7\}$ dan $B - A = \{4, 6, 8\}$
- $A^c = \{4, 6, 8, 9, 10\}$, $B^c = \{1, 2, 7, 9, 10\}$, dan $C^c = \{1, 2, 3, 4, 6, 10\}$
- $A \Delta B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$, $B \Delta C = \{3, 4, 6, 7, 9\}$, dan $A \Delta C = \{1, 2, 3, 8, 9\}$,
- Himpunan $\{6, 8, 10\}$ dan A adalah disjoin.

□

3.4 Hukum dan Pembuktian dalam Teori Himpunan

Berikut hukum-hukum dalam Teori Himpunan:

Hukum-hukum Teori Himpunan

Misalkan $\mathcal{U}$ adalah semesta. Untuk setiap himpunan $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$ berlaku:

1).	$(A^c)^c = A$	Komplemen ganda
2).	$A \cup A = A$	Idempoten
	$A \cap A = A$	
3).	$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	Dominasi
	$A \cap \varnothing = \varnothing$	
4).	$A \cup \varnothing = A$	Identitas
	$A \cap \mathcal{U} = A$	
5).	$A \cup A^c = \mathcal{U}$	Invers
	$A \cap A^c = \varnothing$	
6).	$A \cup B = B \cup A$	Komutatif
	$A \cap B = B \cap A$	
7).	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Asosiatif
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	
8).	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributif
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
9).	$A \cup (A \cap B) = A$	Absorpsi
	$A \cap (A \cup B) = A$	
10).	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	De Morgan
	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	
11).	$A - B = A \cap B^c$	Beda
12).	$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$	Beda simetris

Seperti yang dapat dilihat pada daftar di atas, hukum-hukum untuk himpunan memiliki kemiripan dengan hukum-hukum logika. Jika komplemen ^{c}, irisan $\cap$, gabungan $\cup$, himpunan kosong $\varnothing$, dan himpunan semesta $\mathcal{U}$ berturut-turut diganti dengan negasi $\neg$, konjungsi $\wedge$, disjungsi $\vee$, F, dan T, maka kita peroleh hukum-hukum logika.

Pembuktian proposisi dalam teori himpunan dapat dilakukan dengan cara-cara berikut:

A. Menggunakan tabel kebenaran
B. Menggunakan diagram Venn
C. Menggunakan deduksi logika.

A. Pembuktian dengan tabel kebenaran

Pembuktian proposisi himpunan, dapat dilakukan dengan menggunakan tabel kebenaran, dimana komplemen berperan sebagai negasi, irisan sebagai konjungsi, gabungan sebagai disjungsi, himpunan bagian sebagai implikasi, dan persamaan sebagai bikondisional, seperti yang ditampilkan pada tabel-tabel berikut:

Tabel 3.4.1: Tabel kebenaran A dan A^c

$x \in A$	$x \in A^c$
F	T
T	F

Tabel 3.4.2: Tabel kebenaran operasi himpunan.

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$x \in A \cup B$	$A \subseteq B$	$A = B$
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

Untuk singkatnya, kita akan menghilangkan "$x \in$", sehingga misalnya menggunakan A saja untuk $x \in A$.

Contoh 3.4.1

Buktikan Hukum De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Jawab:

Tabel kebenaran untuk $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ dapat dilihat pada Tabel 3.4.1.

Tabel 3.4.1: Tabel kebenaran $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A \cup B}$	$\boldsymbol{(A \cup B)^c}$	$\boldsymbol{A^c}$	$\boldsymbol{B^c}$	$\boldsymbol{A^c \cap B^c}$
F	F	F	**T**	T	T	**T**
F	T	T	**F**	T	F	**F**
T	F	T	**F**	F	T	**F**
T	T	T	**F**	F	F	**F**

Dapat dilihat pada Tabel 3.4.1 bahwa nilai-nilai $(A \cup B)^c$ pada kolom keempat bersesuaian dengan nilai-nilai $A^c \cap B^c$ pada kolom terakhir. Jadi $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

□

B. Pembuktian dengan diagram Venn

Persamaan himpunan juga dapat dibuktikan dengan menggunakan diagram Venn. Dengan cara ini, ditunjukkan bahwa daerah yang diarsir ruas kiri persamaan dan daerah yang diarsir ruas kanan persamaan adalah sama.

Contoh 3.4.2

Buktikan Hukum Distributif:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(Sebagai Latihan)

C. Pembuktian dengan deduksi logika

Proposisi himpunan dapat juga dibuktikan dengan menggunakan deduksi logika, terutama proposisi yang mengandung implikasi dan hubungan himpunan bagian. Karena himpunan bagian, sesuai definisinya, adalah implikasi.

Contoh 3.4.3

Misalkan $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$. Buktikan $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Jawab:

Perlu diingat bahwa untuk membuktikan $P \Rightarrow Q$, maka kita asumsikan P dan meletakkannya di dalam bendera dan membuat derivasi untuk mendapatkan Q. Dalam hal ini P adalah $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$ dan Q adalah $A \subseteq C$. Ingat pula bahwa $A \subseteq B$ berarti $(\forall x : x \in \mathscr{U} : x \in A \rightarrow x \in B)$.

Jadi kita asumsikan $A \subseteq B \wedge B \subseteq C$, yaitu

$(\forall x : x \in \mathscr{U} : x \in A \rightarrow x \in B)$ dan $(\forall y : y \in \mathscr{U} : y \in B \rightarrow y \in C)$.

dan meletakkannya di dalam bendera biasa, kemudian kita lakukan derivasi untuk mendapatkan $A \subseteq C$ yaitu $(\forall z : z \in \mathscr{U} : z \in A \rightarrow z \in C)$. Hal ini dapat dilakukan dengan cara meletakkan $z \in \mathscr{U}$ di dalam bendera runcing, kemudian mengasumsikan $z \in A$ di dalam bendera biasa, dan akhirnya melakukan derivasi untuk mendapatkan $z \in C$.

1. $(\forall x : x \in \mathscr{U} : x \in A \to x \in B) \wedge (\forall y : y \in \mathscr{U} : x \in$
2. $z \in \mathscr{U}$
3. $z \in A$
4. $(\forall x : x \in \mathscr{U} : x \in A \to x \in B)$ — E$\wedge$ 1
5. $z \in A \to z \in B$ — E$\forall$ 2, 4
6. $z \in B$ — E$\to$ 3,
7. $(\forall y : y \in \mathscr{U} : y \in B \to y \in C)$ — E$\wedge$ 1
8. $z \in B \to z \in C$ — E$\forall$ 2, 7
9. $x \in C$ — E$\to$ 3, 8
10. $x \in A \to x \in C$ — I $\to$3, 9
11. $\forall x \in \mathscr{U} : (x \in A \to x \in C)$ — I$\forall$ 2, 10

$(\forall x \in \mathscr{U} : (x \in A \to x \in B)) \wedge (\forall y \in \mathscr{U} : (y \in B \to y \in C))$
$\to \forall z \in \mathscr{U} : (z \in A \to z \in C)$. — I$\to$ 1, 11

Jadi

$(\forall x : x \in \mathscr{U} : x \in A \to x \in B) \wedge (\forall y : y \in \mathscr{U} : y \in B \to y \in C)$

$\Rightarrow (\forall z : z \in \mathscr{U} : z \in A \to z \in C$.

Dengan kata lain, $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \to A \subseteq C$.

□

Contoh 3.4.4

Misalkan $A, B \subseteq \mathscr{U}$. Buktikan $A \cap B \subseteq A$.

Jawab:

Sesuai dengan definisi himpunan bagian, $A \cap B \subseteq A$ berarti

$$(\forall x : x \in \mathscr{U} : x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A).$$

Sehingga pembuktian proposisi ini dilakukan dengan cara meletakkan $x \in \mathscr{U}$ di dalam bendera runcing, kemudian mengasumsikan $x \in A \wedge x \in B$ di dalam bendera biasa, dan melakukan derivasi untuk mendapatkan $x \in A$. Tentu saja dalam derivasi ini, diterapkan aturan-aturan deduksi yang telah dibahas pada Bab 2.

1.	$x \in \mathscr{U}$	
2.	$x \in A \wedge x \in B$	
3.	$x \in A$	E$\wedge$ 2
4.	$(x \in A \wedge x \in B) \rightarrow x \in A$	I $\rightarrow$ 2, 3
	$(\forall x : x \in \mathscr{U} : x \in A \wedge x \in B \rightarrow x \in A)$	I$\forall$ 1, 4

Dengan kata lain, $A \cap B \subseteq A$.

□

Hukum-hukum himpunan dapat digunakan untuk membuktikan persamaan himpunan.

Contoh 3.4.5

Buktikan bahwa $A - (A \cap B) = A \cap B^c$.

Jawab:

Kita akan membuktikan ini dengan menggunakan hukum-hukum himpunan di atas, sebagai berikut:

$A - (A \cap B)$	**Alasan**
$= A \cap (A \cap B)^c$	Beda
$= A \cap (A^c \cup B^c)$	De Morgan
$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$	Distributif
$= \varnothing \cap (A \cap B^c)$	Invers
$= (A \cap B^c)$	Dominasi

□

Contoh 3.4.6

Buktikan bahwa $((A^c \cup B^c)^c \cup (A \cap B \cap C)) = (A \cap B)$.

Jawab:

Kita akan membuktikan ini dengan menggunakan hukum-hukum himpunan di atas, sebagai berikut:

$(A^c \cup B^c)^c \cup (A \cap B \cap C)$	**Alasan**
$= ((A^c)^c \cap (B^c)^c) \cup (A \cap B \cap C)$	De Morgan
$= ((A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)$	Komplemen ganda
$= (A \cap B) \cup ((A \cap B) \cap C)$	Pemberian kurung
$= A \cap B$	Absorpsi

□

Contoh 3.4.7

Buktikan bahwa $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Jawab:

Kita akan membuktikan ini dengan menggunakan hukum-hukum himpunan di atas, sebagai berikut:

$A \Delta B$	**Alasan**
$= (A - B) \cup (B - A)$	Beda Simetris
$= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$	Beda

$= (A \cup (B \cap A^c)) \cap (B^c \cup (B \cap A^c))$	Distributif
$= ((A \cup B) \cap (A \cup A^c)) \cap ((B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c))$	Distributif
$= ((A \cup B) \cap \mathcal{U}) \cap (\mathcal{U} \cap (B^c \cup A^c))$	Invers
$= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$	Identitas
$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$	De Morgan
$= (A \cup B) - (A \cap B).$	Beda

□

3.5 Latihan Soal 3

3.1. Manakah di antara deskripsi berikut yang merupakan himpunan?

a. Kumpulan benda-benda panas.
b. Kumpulan huruf dalam abjad Bahasa Indonesia.
c. Kumpulan orang-orang cerdas.
d. Kumpulan nama-nama bulan dalam kalendar.
e. Kumpulan bilangan bulat positif yang habis dibagi tiga.
f. Kumpulan mahasiswa yang baik.

3.2. Tentukan anggota-anggota dari himpunan-himpunan berikut:

a. $\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 5\}$
b. $\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 \leq 100\}$
c. $\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 50 \wedge x/3 \in \mathbb{Z}\}$
d. $\{ 2x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 40\}$
e. $\{ 2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \leq x \leq 5\}$
f. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge (\exists y : y \in \mathbb{N} : xy = 120)\}$
g. $\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x \leq 100 \wedge (y \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{N} \wedge$
$yz = x \rightarrow (y = 1 \wedge z = x) \vee (y = x \wedge z = 1)\}.$

3.3. Himpunan mana yang tidak kosong?

a. $\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3x + 2 = 8 \}$
b. $\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 2x + 5 = 2 \}$
c. $\{ x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x^2 + 4 = 6 \}$
d. $\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x + y = 0 \}$
e. $\{ x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x + y = 0 \}$
f. $\{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x^2 + 4 = 29 \}$

3.4. Salinlah notasi enumerasi berikut ke dalam notasi karakterisasi:

a. $\{3, 6, 9, 12, 15\}$

b. {1, 4, 9, 16, 25, 36}
c. {7, 12, 17, 22, 27}
d. { . . . , -13, -10, -7, -4, -2}
e. {0, 2, 4, 8, 16, 32, 64}
f. {1, 121, 12321, 1234321, 123454321}

3.5. Misalkan $\mathscr{U} = \{ x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 20\}$. Sajikan ketiga himpunan berikut dalam sebuah diagram Venn, jika A, B, C, $D \subseteq \mathscr{U}$:

A = Himpunan bilangan prima.
$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$
$C = \{x \mid x \in \mathscr{U} \wedge x^2 \in \mathscr{U}\}$

3.6. Manakah pernyataan yang benar?

a. $\varnothing \in \varnothing$
b. $\varnothing \subseteq \varnothing$
c. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
d. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
e. $\varnothing \subset \varnothing$
f. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

3.7. Misalkan $A = \{1, \{2\}\}$. Manakah pernyataan yang benar?

a. $1 \in A$
b. $1 \subseteq A$
c. $2 \in A$
d. $\{2\} \subseteq A$
e. $\{\{2\}\} \subset A$
f. $\{1\} \in A$
g. $\{1\} \subseteq A$
h. $\{2\} \in A$
i. $\{\{2\}\} \subseteq A$
j. $\{1, 2\} \subseteq A$

3.8. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Berikan contoh:

a. Himpunan B sehingga $B \subseteq A$.
b. Himpunan C sehingga $C \subset A$ tetapi $C \not\subseteq A$.
c. Himpunan D sehingga $D \subseteq A$ tetapi $D \not\subset A$.

3.9. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tentukan banyaknya:

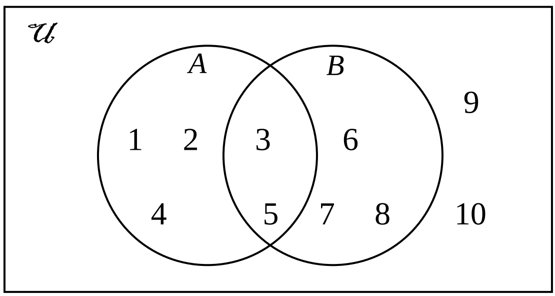
d. Himpunan bagian dari A yang terdiri dari 1 anggota.
e. Himpunan bagian dari A yang terdiri dari 2 anggota.
f. Himpunan kuasa $\mathscr{P}(A)$.

3.10. Buktikan bahwa untuk semesta $\mathcal{U}$ dan semua himpunan $A \subseteq \mathcal{U}$, berlaku $\varnothing \subseteq A$.

3.11. Misalkan $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, ..., 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, dan $C = \{1, 2, 3\}$. Tentukan:

a. $A \cup B$
b. $A \cup B \cup C$
c. $(A \cup B)^c$
d. $A \cup (B \cap C)$
e. $B^c \cap C^c$
f. $(A \cup B) - C$
g. $B - (C - D)$
h. $A \cap (B \cup C)$
i. $B^c \cup C^c$
j. $(A \cup B) - (A \cap C)$

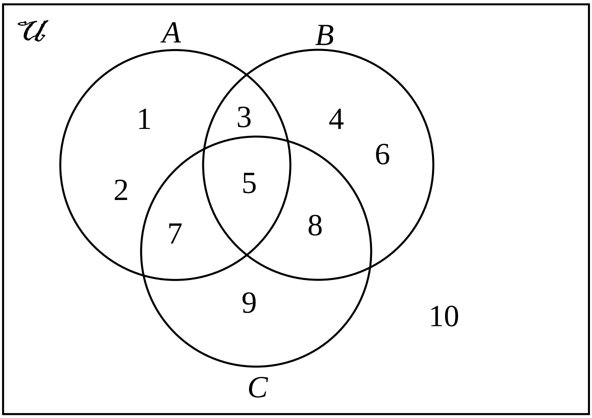
3.12. Perhatikan diagram Venn di bawah ini:



Tentukan:

a. $\mathcal{U}$
b. A
c. B
d. $A \cup B$
e. $A \cap B$
f. A^c
g. $A^c \cup B^c$
h. $A^c \cap B^c$
i. $(A \cup B)^c$
j. $(A \cap B)^c$
k. $A - B$
l. $A \cap B^c$
m. $A \Delta B$
n. $A^c \Delta B^c$

3.13. Perhatikan diagram Venn di bawah ini:



Tentukan:

a. $\mathcal{U}$

b. $A \cup B$

c. $A \cup B \cup C$

d. $A \cup (B \cap C)$

e. $A^c \cup B^c$

f. $A^c \cap B^c$

g. $A \cap (B^c \cap C^c)$

h. $(A \cup B) - C$

i. $B - (C - D)$

j. $A - (B \cup C)^c$

k. $B^c - C^c$

l. $(A \cup B) - (A \cap C)$

m. $(A \Delta B) \Delta C$

n. $(A \Delta B) \cup (A \Delta C)$

3.14. Misalkan $A, B, C, D, E \subseteq \{x \in \mathbf{Z} \mid -20 \leq x \leq 100\}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$A = \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$,

$B = \{3n \mid n \in \mathbf{Z}\}$,

$C = \{4n \mid n \in \mathbf{Z}\}$,

$D = \{6n \mid n \in \mathbf{Z}\}$,

$E = \{8n \mid n \in \mathbf{Z}\}$,

Tentukan

a. $C \cap E$

b. $A \cap B$

c. A^c

i. $B \cup D$

j. $B \cap D$

k. $A \cap E$

d. $A \cup B$
l. $A \cup E$
e. $A \cap B \cap C$
m. $B \cap D \cap E$
f. $A \cap B \cap C$
n. $B \cap D \cap E$
g. $A^c \cap B \cap C$
o. $A \cap B^c \cap E$
h. $A^c \cap B^c \cap C^c$
p. $A \Delta B$

3.15. Sebuah survey dilakukan terhadap 100 mahasiswa dengan hasil sebagai berikut: 50 mahasiswa memiliki laptop, 60 mahasiswa memiliki telepon genggam, 5 mahasiswa tidak memiliki keduanya. Berapa banyak mahasiswa:

a. yang memiliki keduanya?
b. yang hanya memiliki laptop tanpa telepon genggam?
c. yang hanya memiliki telepon genggam tanpa laptop?

3.16. Dalam sebuah organisasi mahasiswa, 50 % gemar olahraga, 45 % gemar musik, 40 % gemar main game komputer, 15 % gemar olahraga dan musik, 20 % gemar olahraga dan game komputer, 15 % tidak gemar satupun dari ketiganya, serta 10 % gemar ketiganya. Jika terdapat 30 mahasiswa yang tidak menggemari satupun dari ketiganya, tentukan banyaknya mahasiswa:

a. Dalam organisasi tersebut?
b. Yang gemar ketiganya?
c. Yang gemar musik dan komputer?
d. Yang hanya gemar olahraga saja?
e. Yang hanya gemar musik saja?
f. Yang hanya gemar game komputer saja?

3.17. Sebuah survey dilakukan di sebuah desa dengan hasil sebagai berikut: 300 orang berumur 20 tahun ke bawah, 900 orang berumur 50 tahun ke bawah, 1100 orang berumur 80 tahun ke bawah, dan 20 orang berumur di atas 80 tahun. Tentukan berapa banyak yang di survey di desa tersebut:

a. Total penduduk.

b. Penduduk yang berusia di atas 50 tahun.

c. Penduduk yang berusia di atas 50 tahun sampai dengan 80 tahun.

d. Penduduk yang berusia di atas 20 tahun sampai dengan 50 tahun.

e. Penduduk yang berusia di atas 50 tahun.

3.18. Misalkan $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$. Buktikan:

a). $A \subseteq B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

b). $A \subset B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$.

c). $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

3.19. Buktikan hukum-hukum teori himpunan dengan tabel kebenaran.

3.20. Gunakan diagram Venn untuk membuktikan atau menyangkal:

a. $A \subseteq A \Delta B$

b. $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$.

c. $A^c \cup B^c \cup C^c = (A \cap B \cap C)^c$.

d. $A - (A - B) = A \cap B$.

e. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

3.21. Buktikan dengan deduksi:

a. $A \subseteq A \cup B$.

b. $A - (A - B) \subseteq B$.

c. $(B \subseteq A) \Rightarrow ((B \cap C) \subseteq (A \cap C))$.

3.22. Buktikan dengan hukum-hukum himpunan:

a. $(A \cup B) \cap (A^c \cap B)^c = A$.

b. $(A - B) \cup (A - C) = A - (B \cap C)$.

c. $(((A \cup B) \cap C)^c \cup B^c)^c = B \cap C$.

d. $((A^c \cup (B \cup C)^c)^c = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

e. $((A \cup B) \cap (A \cup B^c)) \cup B = A \cup B$.

f. $(A^c \cup B) \cap (B^c \cap (C \cup B^c)) = (A \cup B)^c$.

g. $\mathrm{A} \cap ((B \cup C) \cup (B \cup ((C \cap D) \cup (C \cap D^c))^c) = A$.

Bab 4
Kuantifikasi

The whole is more than the sum of its parts.

Aristotle (384 BC – 322 BC).

Greeks Philosopher.

Kuantifikasi (*quantification*) adalah pengikatan variabel oleh operasi yang disebut kuantor (*quantifier*). Variabel tersebut menjadi variabel terikat terhadap kuantor dan mengambil nilai dari domain yang didefinisikan.

Kuantifikasi berawal dari pemakaiannya di logika, yaitu kuantifikasi universal yang berarti "semua" dan kuantifikasi eksistensi yang berarti "ada" yang sudah disinggung pada Bab 1. Keduanya menunjukkan kuantitas. Sehingga kuantifikasi berhubungan dengan berhitung dan mengukur.

Dalam bab ini, kedua kuantifikasi akan kembali dibahas ditambah dengan kuantifikasi lainnya, yaitu penjumlahan, perkalian, kardinalitas, maksimum, minimum, gabungan, irisan, dan barisan, serta kombinasi antara kuantifikasi-kuantifikasi tersebut. Yang menjadi fokus dalam pembahasan kuantifikasi ini, selain evaluasi nilai kuantifikasi, adalah bagaimana perobahan kuantifikasi jika domain berobah, misalnya dipisah atau digabung, dan jika predikat ekspresi berobah.

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan pembaca dapat mengenal berbagai kuantifikasi, dapat menjelaskan efek terhadap kuantifikasi bilamana domain dan predikat ekspresi dirobah, dan dapat mengkombinasikan berbagai kuantifikasi.

4.1 Universal

Definisi 4.1

Bentuk kuantifikasi adalah **($\forall\ x : D(x) : P(x)$)** di baca ”untuk semua x yang memenuhi $D(x)$, berlaku $P(x)$”, dimana:

- $\forall$ disebut **kuantor universal**.
- $D(x)$ disebut **predikat domain** dari x.
- $P(x)$ adalah **predikat ekspresi**.

Kuantifikasi universal ($\forall x : D(x) : P(x)$) bernilai T jika dan hanya jika untuk semua x yang memenuhi $D(x)$, predikat $P(x)$ bernilai T. Berikut ini sifat-sifat kuantifikasi universal:

Sifat-sifat 4.1 (Kuantifikasi Universal)

1. Domain kosong:
   $(\forall x : \mathrm{F} : P(x)) \Leftrightarrow \mathrm{T}.$
2. Ekspresi benar:
   $(\forall x : D(x) : \mathrm{T}) \Leftrightarrow \mathrm{T}.$
3. Singleton:
   $(\forall x : x = y : P(x)) \Leftrightarrow P(y).$
4. Pemisahan Domain/Disjungsi Predikat Domain:
   $(\forall x : D(x) \vee C(x): P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : D(x) : P(x)) \wedge (\forall x : C(x) : P(x)).$
5. Konjungsi Predikat Domain:
   $(\forall x : D(x) \wedge C(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : D(x) : C(x) \rightarrow P(x)).$
6. Konjungsi Predikat Ekspresi:
   $(\forall x : D(x) : P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x : D(x) : P(x)) \wedge (\forall x : D(x) : Q(x)).$
7. Disjungsi Predikat Ekspresi:
   $(\forall x : D(x) : P(x)) \Rightarrow (\forall x : D(x) : P(x) \vee Q(x)).$
8. Penukaran Predikat:
   $(\forall x : D(x) : \neg P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : P(x) : \neg D(x)).$

Contoh 4.1.1

$(\forall x : x \in \varnothing : x < 5) \Leftrightarrow \mathrm{T}$, karena $x \in \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{F}$. Sehingga $(\forall x : \mathrm{F} : x < 5) \Leftrightarrow \mathrm{T}$

□

Contoh 4.1.2

Evaluasi $(\forall x : x \in \{1, 2, 3, 4\} : x < 5)$.

Jawab:

$(\forall x : x \in \{1, 2, 3, 4\} : x < 5)$
$\Leftrightarrow (\forall x : x \in \{1, 2\} : x < 5) \wedge (\forall x : x \in \{3, 4\} : x < 5),$
$\Leftrightarrow (\forall x : x = 1 : x < 5) \wedge (\forall x : x = 2 : x < 5)$
$\quad \wedge (\forall x : x = 3 : x < 5) \wedge (\forall x : x = 4 : x < 5),$
$\Leftrightarrow (1 < 5) \wedge (2 < 5) \wedge (3 < 5) \wedge (4 < 5),$
$\Leftrightarrow T \wedge T \wedge T \wedge T,$
$\Leftrightarrow T.$
$\square$

Contoh 4.1.3

Buktikan Konjugsi Predikat Domain: $(\forall x : D(x) \wedge C(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : D(x) : C(x) \rightarrow P(x))$.

Jawab:
Bukti:

1.	$(\forall x : D(x) \wedge C(x) : P(x))$	
2.	$D(x)$	
3.	$C(x)$	
4.	$D(x) \wedge C(x)$	I$\wedge$ 2, 3
5.	$P(x)$	E$\forall$ 1, 4
6.	$C(x) \rightarrow P(x)$	I$\rightarrow$ 3, 5
7.	$(\forall x : D(x) : C(x) \rightarrow P(x))$	I$\forall$ 2, 6
8.	$(\forall x : D(x) \wedge C(x) : P(x)) \rightarrow (\forall x : D(x) : C(x) \rightarrow P(x)$	

Bukti konversnya adalah

9.	$(\forall x : D(x) : C(x) \rightarrow P(x))$	
10.	$D(x) \wedge C(x)$	
11.	$D(x)$	E$\wedge$ 2
12.	$C(x) \rightarrow P(x))$	E$\forall$ 1, 3
13.	$C(x)$	E$\wedge$ 2
14.	$P(x)$	E$\rightarrow$ 4, 5
15.	$(\forall x : D(x) \wedge C(x) : P(x))$	I$\forall$ 2, 6
16.	$(\forall x : D(x) : C(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (\forall x : D(x) \wedge C(x) : P(x))$	I$\rightarrow$ 1, 7
17.	$(\forall x : D(x) : C(x) \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (\forall x : D(x) \wedge C(x) : P(x))$	I$\leftrightarrow$ 8, 16

Jadi, $(\forall x : D(x) \wedge C(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : D(x) : C(x) \rightarrow P(x))$

□

Contoh 4.1.3

Buktikan Konjungsi Predikat Ekspresi:

$(\forall x : D(x) : P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x : D(x) : P(x)) \wedge (\forall x : D(x) : Q(x))$

<u>Jawab</u>:

$(\forall x : D(x) : P(x) \wedge Q(x))$	**<u>Alasan</u>**
$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) : (P(x) \wedge Q(x)) \vee \mathrm{T})$	Identitas
$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) : \neg\neg(P(x) \wedge Q(x)) \vee \mathrm{T})$	Negasi ganda
$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) : \neg(\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \vee \mathrm{T})$	De Morgan
$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) : (\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \rightarrow \mathrm{T})$	Implor
$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x)) : \mathrm{T})$	Konjungsi
$\Leftrightarrow (\forall x : \neg P(x) \vee \neg Q(x) : D(x) \rightarrow \mathrm{T})$	Konjungsi

$\Leftrightarrow (\forall x : \neg P(x) : D(x) \rightarrow \mathrm{T}\ ) \wedge\ (\forall x : \neg Q(x) : D(x) \rightarrow \mathrm{T}\ )$

Pemisahan Domain $\forall$

$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) \wedge \neg P(x) : \mathrm{T}\ ) \wedge\ (\forall x : D(x) \wedge \neg Q(x) : \mathrm{T}\ )$

Konjungsi Predikat Domain $\forall$

$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) : \neg P(x) \rightarrow \mathrm{T}\ ) \wedge\ (\forall x : D(x) : \neg Q(x) \rightarrow \mathrm{T}\ )$

Konjungsi Predikat Domain $\forall$

$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) : P(x) \vee \mathrm{T}\ ) \wedge\ (\forall x : D(x) : Q(x) \vee \mathrm{T}\ )$ Implor

$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) : P(x)) \wedge\ (\forall x : D(x) : Q(x))$ Identitas.

4.2 Eksistensi

Definisi 4.2

($\exists x$: $D(x)$: $P(x)$) adalah kuantifikasi eksistensi dan di baca ”ada x yang memenuhi $D(x)$, berlaku $P(x)$”. $\exists$ adalah kuantor eksistensi.

Kuantifikasi eksistensi ($\exists x : D(x) : P(x)$) bernilai T jika dan hanya jika ada x yang memenuhi $D(x)$, predikat $P(x)$ bernilai T. Berikut ini sifat-sifat kuantifikasi eksistensi:

Sifat-sifat 4.2 (Kuantifikasi Eksistensi)

1. Eksuni (Eksistensi ke universal)
   $(\exists x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow \neg(\forall x : D(x) : \neg P(x))$.
2. Domain kosong:
   $(\exists x : \text{False} : P(x)) \Leftrightarrow \text{F}$.
3. Ekspresi benar:
   $\neg(\exists x : D(x) : \text{F}) \Leftrightarrow \text{T}$.
4. Singleton:
   $(\exists x : x = y : P(x)) \Leftrightarrow P(y)$.
5. Pemisahan domain/Disjungsi domain:
   $(\exists x : D(x) \vee C(x): P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : D(x) : P(x)) \vee (\exists x : C(x) : P(x))$.
6. Konjungsi Predikat Domain:
   $(\exists x : D(x) \wedge C(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : D(x) : C(x) \wedge P(x))$.
7. Konjungsi Predikat Ekspresi:
   $(\exists x : D(x) : P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x : D(x) : P(x)) \wedge (\exists x : D(x) : Q(x))$.
8. Disjungsi Predikat Ekspresi:
   $(\exists x : D(x) : P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x : D(x) : P(x)) \vee (\exists x : D(x) : Q(x))$.
9. Penukaran Predikat:
   $(\exists x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : P(x) : D(x))$.

Contoh 4.2.1

$(\exists x : x \in \varnothing : x < 5) \Leftrightarrow \text{F}$, karena $x \in \varnothing \Leftrightarrow \text{F}$. Sehingga
$(\exists x : \text{F} : x < 5) \Leftrightarrow \text{F}$.

□

Contoh 4.2.2

$(\exists x : x \in \{1, 2, 3\} : x < 2)$

$\Leftrightarrow (\exists x : x \in \{1, 2\} : x < 2) \vee (\exists x : x \in \{3\} : x < 2)$,
Pemisahan domain $\forall$

$\Leftrightarrow (\exists x : x \in \{1\} : x < 2) \vee (\exists x : x \in \{2\} : x < 2)$
$\vee (\exists x : x \in \{3\} : x < 2)$,Pemisahan domain $\forall$

$\Leftrightarrow (1 < 2) \vee (2 < 2) \vee (2 < 3)$, Singleton $\forall$

$\Leftrightarrow$ F $\vee$ F $\vee$ T , Kalkulus

$\Leftrightarrow$ T , Identitas.

□

Contoh 4.2.3

Buktikan Konjungsi Predikat Domain:

$$(\exists x : D(x) \wedge C(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : D(x) : C(x) \wedge P(x)).$$

<u>Jawab</u>:

$(\exists x : D(x) \wedge C(x) : P(x))$

	<u>Alasan</u>
$\Leftrightarrow \neg(\forall x : D(x) \wedge C(x) : \neg P(x))$	Eksuni
$\Leftrightarrow \neg(\forall x : D(x) : C(x) \rightarrow \neg P(x))$	Konjungsi Predikat Domain $\forall$
$\Leftrightarrow \neg(\forall x : D(x) : \neg C(x) \vee \neg P(x))$	Implor
$\Leftrightarrow \neg(\forall x : D(x) : \neg(C(x) \wedge P(x)))$	De Morgan
$\Leftrightarrow (\forall x : D(x) : C(x) \wedge P(x))$	Eksuni.

□

Contoh 4.2.4

Buktikan Singleton:

$$(\exists x : x = y : P(x)) \Leftrightarrow P(y)$$

Jawab:

$(\exists x : x = y : P(x))$	**Alasan**
$\Leftrightarrow (\exists x : x = y \wedge x = y : P(x))$	Idempoten
$\Leftrightarrow (\exists x : x = y : x = y \wedge P(x))$	Konjungsi
$\Leftrightarrow (\exists x : x = y : x = y \wedge P(y))$	Substitusi
$\Leftrightarrow (\exists x : x = y : P(y))$	Konjungsi
$\Leftrightarrow P(y)$	*y*

□

Contoh 4.2.5

Buktikan Penukaran Predikat:

$$(\exists x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : P(x) : D(x))$$

Jawab:

$(\exists x : D(x) : P(x))$	**Alasan**
$\Leftrightarrow \neg(\forall x : D(x) : \neg P(x))$	Eksuni
$\Leftrightarrow \neg(\forall x : P(x) : \neg D(x))$	PenukaraPredikat
$\Leftrightarrow (\exists x : P(x) : D(x))$	Eksuni.

□

Kuantifikasi universal dan kuantifikasi eksistensi bisa dikombinasikan dan membentuk kuntifikasi bersarang.

Contoh 4.2.6

Mana dari kuantifikasi berikut yang bernilai T (benar):

$(\forall x : x \in \mathbb{N} : (\exists y : y \in \mathbb{N} : x^2 = y))$ atau $(\exists y : y \in \mathbb{N} : (\forall x : x \in \mathbb{N} : x^2 = y))$?

Jawab:

$(\forall x : x \in \mathbb{N} : (\exists y : y \in \mathbb{N} : x^2 = y))$ bernilai T, karena untuk semua bilangan asli *x*, kuadratnya adalah juga bilangan asli *y*.

Sedangkan $(\exists y : y \in \mathbb{N} : (\forall x : x \in \mathbb{N} : x^2 = y))$ bernilai F, karena tidak ada bilangan asli *y* yang adalah kuadrat dari semua bilangan asli; kuadrat dari setiap bilangan asli berbeda.

4.3 Penjumlahan

Definisi 4.3

1. **(Σx : $D(x)$: $E(x)$)** disebut **kuantifikasi penjumlahan** dan dibaca "Jumlah $E(x)$ untuk x memenuhi $D(x)$", di mana
   - Simbol Σ disebut **kuantor penjumlahan,**
   - variabel x disebut **dummy**,
   - predikat $D(x)$ disebut **predikat domain** dari x,
   - dan $E(x)$ adalah **ekspresi** yang mengandung variabel x.
2. Jika $D(x) \equiv (m \leq x \leq n \wedge x \in S)$, di mana S adalah $\mathbb{N}$ atau $\mathbb{Z}$ (nilai x berturutan), maka:

   $$(\Sigma x : D(x) : E(x)) = \sum_{x=m}^{n} E(x).$$

   Penjumlahan ini disebut juga **deret**.

Sifat-sifat 4.3 (Kuantifikasi Penjumlahan)

1. Domain kosong:

   $(\Sigma x : \text{False} : E(x)) = 0.$
2. Singelton:

   $(\Sigma x : x = y : E(x)) = E(y).$
3. Untuk konstan c, $(\Sigma x : m \leq x \leq n \wedge x \in \mathbb{N}^{+} : c) = c(n - m + 1).$
4. Pemisahan domain/Disjungsi domain:

   $(\Sigma x : D(x) \vee C(x): E(x)).$

   $= (\Sigma x : D(x) : E(x)) + (\Sigma x : C(x) : E(x)) - (\Sigma x : C(x)$

   $\wedge\, D(x) : E(x)).$
5. Konjungasi Predikat Domain:

   $(\Sigma x : D(x) \wedge C(x) : E(x))$

   $= (\Sigma x : D(x) : E(x)) + (\Sigma x : C(x) : E(x)) - (\Sigma x : C(x)$

   $\vee\, D(x) : E(x)).$
6. Penjumlahan Ekspresi:

   $(\Sigma x : D(x) : E(x) \pm F(x)) =$

   $(\Sigma x : D(x) : E(x)) \pm (\Sigma x : D(x) : F(x)).$
7. Perkalian di luar kuantifikasi:

   $c \times (\Sigma x : D(x) : E(x)) = (\Sigma x : D(x) : c.E(x)).$

Teorema 4.3 (Deret Khusus)

1. $\sum_{x=1}^{n}(x) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{x=1}^{n}(2x - 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
3. $\sum_{x=1}^{n}(x^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. $\sum_{x=1}^{n}(x^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. $\sum_{x=1}^{n}(x^4) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$
   $= \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1}{30}$.
6. $\sum_{x=0}^{n}(r^x) = r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$, untuk $r \neq 1$.
7. $\sum_{x=0}^{\infty}(r^x) = r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}$, untuk $|r| < 1$.

Contoh 4.3.1

$(\Sigma x : x \in \{1, 2, 5, 6, 9\} : 2x) = 2.1 + 2.2 + 2.5 + 2.6 + 2.9$
$= 2 + 4 + 10 + 12 + 18 = 46.$

□

Contoh 4.3.2

Contoh untuk domain yang turutan, adalah:

$(\Sigma x : x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq x \leq 5 : 2x + 1) = \sum_{x=2}^{5}(2x + 1)$
$= (2.2 + 1) + (2.3 + 1) + (2.4 + 1) + (2.5 + 1) = 5 + 7 + 9 + 11 = 32.$

□

Contoh 4.3.3

Contoh untuk pemisahan domain tanpa irisan:

$(\Sigma x : x \in \mathbb{N} \wedge 2 \le x \le 6 : 2x)$

$= (\Sigma x : x \in \mathbb{N} \wedge 2 \le x \le 4 : 2x) + (\Sigma x : x \in \mathbb{N} \wedge 5 \le x \le 6 : 2x)$

$= (2.2 + 2.3 + 2.4) + (2.5 + 2.6) = (4 + 6 + 8) + (10 + 12) = 40.$

□

Contoh 4.3.4

Contoh untuk pemisahan domain dengan irisan:

$(\Sigma x : x \in \{1, 2, 5, 6, 9\} : 2x)$

$= (\Sigma x : x \in \{1, 2, 5\} : 2x) + (\Sigma x : x \in \{5, 6, 9\} : 2x) - (\Sigma x : x \in \{5\} : 2x)$

$= (2.1 + 2.2 + 2.5) + (2.5 + 2.6 + 2.9) - (2.5)$

$= (2 + 4 + 10) + (10 + 12 + 18) - 10 = 46.$

□

Contoh 4.3.5

Contoh penjumlahan ekspresi:

$(\Sigma x : x \in \{1, 2, 5, 6\} : x^2 + x)$

$= (\Sigma x : x \in \{1, 2, 5, 6\} : x^2) + (\Sigma x : x \in \{1, 2, 5, 6\} : x)$

$= (1^2 + 2^2 + 5^2 + 6^2) + (1 + 2 + 5 + 6)$

$= (1 + 4 + 25 + 36) + (1 + 2 + 5 + 6) = 66 + 14 = 80.$

□

Contoh 4.3.6

Contoh perkalian dari luar kuantifikasi:

$3\ (\Sigma x : x \in \{1, 2, 5, 6\} : x)$

$= 3(1 + 2 + 5 + 6) = (3.1 + 3.2 + 3.5 + 3.6) = (\Sigma x : x \in \{1, 2, 5, 6\} : 3x) = 42.$

□

Contoh 4.3.7

Buktikan poin 1 Teorema 4.3: $\sum_{x=1}^{n}(x)$ = 1 + 2 + 3 + . . . + n = $\frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Jawab</u>:

Misalkan $S = \sum_{x=1}^{n}(x)$.

$$
\begin{array}{rcl}
S & = & 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\
S & = & n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \\
\hline
2S & = & (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)
\end{array}
\quad +
$$

Sehingga $2S = n(n + 1)$.

Jadi $S = n(n + 1)/2$.

Di Bab 5, persamaan ini akan dibuktikan dengan cara lain.

4.4 Perkalian

Definisi 4.4

1. **(Πx : $D(x)$: $E(x)$)** disebut **kuantifikasi perkalian** dan dibaca ”Perkalian $E(x)$ untuk x memenuhi $D(x)$”, di mana
   - Simbol Π disebut **kuantor perkalian,**
   - variabel x disebut **dummy**,
   - predikat $D(x)$ disebut **predikat domain** dari x,
   - dan $E(x)$ adalah **ekspresi** yang mengandung variabel x.
2. Jika $D(x) \equiv (m \le x \le n \wedge x \in S)$, di mana S adalah $\mathbb{N}$ atau $\mathbb{Z}$ (nilai x berturutan), maka:

$$(\Sigma x : D(x) : E(x)) = \prod_{x=m}^{n} E(x).$$

3. Faktorial didefinisikan

$$0! = 1 \text{ dan}$$

$$n! = \prod_{x=1}^{n} (x) \text{, untuk } n > 0.$$

Sifat-sifat 4.4 (Kuantifikasi Perkalian)

1. Domain kosong:

$$(\Pi x : \text{False} : E(x)) = 1.$$

2. Singelton:

$$(\Pi x : x = y : E(x)) = E(y).$$

3. Untuk konstan c, $(\Pi x : m \le x \le n \wedge x \in \mathbb{N}^+ : c)$

$$= c^{(n-m+1)}.$$

4. Pemisahan domain/disjungsi domain:

$$(\Pi x : D(x) \vee C(x) : E(x))$$
$$= (\Pi x : D(x) : E(x)) \times (\Pi x : C(x) : E(x)) \,/\, (\Pi x : C(x) \wedge D(x) : E(x)).$$

5. Konjungasi Predikat Domain:

$$(\Pi x : D(x) \wedge C(x) : E(x))$$
$$= (\Pi x : D(x) : E(x)) \times (\Pi x : C(x) : E(x)) \,/\, (\Pi x : C(x)$$

Contoh 4.4.2

$(\Pi x : x \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq x \leq 6 : x + 1)$
$= \prod_{x=2}^{6}(x+1) = (2 + 1)(3 + 1)(4 + 1)(5 + 1)(6 + 1) = 3 . 4 . 5 . 6 . 7 = 2520.$

□

Contoh 4.4.3

$(\Pi x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 5 : 2) = \prod_{x=1}^{5}(2) = (2)(2)(2)(2)(2) = 2^5.$

□

Contoh 4.4.4

$(\Pi x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 5 : x) = \prod_{x=1}^{5}(x) = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 5! = 120.$

□

Contoh 4.4.5

$(\Pi x : x \in \{1, 2, 5, 6, 9\} : x + 1)$
$= (\Pi x : x \in \{1, 2, 5\} : x + 1) \times (\Pi x : x \in \{5, 6, 9\} : x + 1) / (\Pi x : x \in \{5\}: x + 1)$
$= (1 + 1)(2 + 1) (5 + 1) \times (5 + 1)(6 + 1)(9 + 1) / (5 + 1)$
$= 2 . 3 . 6 . 6 . 7 . 10 / 6 = 2 . 3 . 6 . 7 . 10 = 2520.$

□

Kuantifikasi perkalian dapat dikombinasikan dengan kuantifikasi penjumlahan. Contohnya sebagai berikut:

Contoh 4.4.6

$(\Pi x : x \in \{1, 3, 5\} : (\Sigma y : y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y \leq 5 : y))$
$= (\Sigma y : y \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq y \leq 5 : y) \times (\Sigma y : y \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq y \leq 5 : y) \times (\Sigma y : y \in \mathbb{N} \wedge 5 \leq y \leq 5 : y)$
$= (1 + 2 + 3 + 4 + 5) (3 + 4 + 5) (5) = 15 . 12 . 5 = 900.$

□

4.5 Kardinalitas

Definisi 4.5

(#*x* : *D*(*x*) : *P*(*x*)) disebut **kuantifikasi kardinalitas** dan dibaca ”Banyaknya x yang memenuhi $D(x)$ dan $P(x)$”, di mana

- Simbol # disebut **kuantor kardinalitas,**
- variabel x disebut **dummy**,
- predikat $D(x)$ disebut **predikat domain** dari x,
- dan $P(x)$ adalah **predikat ekspresi** yang mengandung variabel x.

Kuantifikasi kardinalitas menghasilkan sebuah bilangan cacah.

Beberapa sifat kuantifikasi kardinalitas adalah sebagai berikut:

Sifat-sifat 4.5 (Kuantifikasi Kardinalitas)

1. Domain kosong:

   $(\#x : \text{False} : P(x)) = 0.$

2. Singelton:

   $(\#x : x = y : \text{True}) = 1.$

3. Perpindahan predikat:

   $(\#x : D(x) : P(x)) = (\#x : D(x) \wedge P(x) : \text{True}).$

4. Pemisahan domain/disjungsi domain:

   $(\#x : D(x) \vee C(x): P(x))$

   $= (\#x : D(x) : P(x)) + (\#x : C(x) : P(x)) – (\#x : C(x)$

   $\wedge D(x) : P(x)).$

5. Hubungan Kardinalitas dan Penjumlahan:

   $(\#x : D(x) : \text{True}) = (\Sigma x : D(x) : 1).$

6. Hubungan kardinalitas dengan universal:

   $(\forall x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow ((\#x : D(x) : \neg P(x)) = 0).$

7. Hungungan kardinalitas dengan eksistensi:

   $(\exists x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow ((\#x : D(x) : P(x)) \geq 1).$

□

Contoh 4.5.2

Contoh perpindahan predikat:

$(\#x : x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq x \leq 10 : x \text{ genap})$

$= (\#x : x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq x \leq 10 \wedge x \text{ genap}: \text{True})$

$= (\#x : x \in \{4, 6, 8, 10\}: \text{True})$

$= 4.$

□

Contoh 4.5.3

Cntoh pemisahan domain:

$(\#x : x \in \{ 3, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16\} : x \text{ genap})$

$= (\#x : x \in \{ 3, 5, 6, 8, 15, 16\} : x \text{ genap}) + (\#x : x \in \{5, 8, 9, 12, 14, 15, 16\} : x \text{ genap})$

$- (\#x : x \in \{5 , 8, 15, 16\} : x \text{ genap})$

$= 3 + 4 - 2 = 5.$

□

Contoh 4.5.4

Contoh kombinasi kuantifikasi kardinalitas dengan kuantifikasi universal:

Jika *a* mod *b* didefinisikan sebagai sisa pembagian *a* oleh *b*, maka tentukan:

$(\#x : x \in \{11, 12, 14, 20, 24, 26, 30\} : (\forall y : y \in \{3, 4\} : x \bmod y = 2)).$

Jawab:

Berapa banyak *x* dari {11, 12, 14, 20, 24, 26, 30} yang jika menghasilkan sisa 2 jika dibagi dengan 3 dan 4? Jawabnya 2, yaitu 14 dan 26.

□

4.6 Maksimum

Definisi 4.6

1. **(<u>MAX</u> *x* : *D*(*x*) : *E*(*x*))** disebut **kuantifikasi maksimum** dan dibaca ”Nilai maksimum dari *E*(*x*) di mana *x* memenuhi *D*(*x*)”, di mana
   - Simbol **<u>MAX</u>** disebut **kuantor maksimum,**
   - variabel *x* disebut **dummy**,
   - predikat *D*(*x*) disebut **predikat domain** dari *x*,
   - dan *E*(*x*) adalah **ekspresi** yang mengandung variabel *x*.
2. Operasi biner **<u>max</u>** didefinisikan sebagai berikut:

$$a\ \underline{\text{max}}\ b = \begin{cases} a, & \text{jika } b \le a \\ b, & \text{jika } a < b. \end{cases}$$

Beberapa sifat kuantifikasi maksimum adalah sebagai berikut:

Sifat-sifat 4.6 (Kuantifikasi Maksimum)

1. Domain kosong:
   ($\underline{\text{MAX}}$ x : False : $E(x)$) = $-\infty$.
2. Singelton:
   ($\underline{\text{MAX}}$ $x : x = y : E(x)) = E(y)$.
3. Pemisahan domain/Disjungsi domain:
   $(\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) \vee C(x) : E(x)) = (\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : E(x))\ \underline{\text{max}}\ (\underline{\text{MAX}}\ x : C(x) : E(x))$.
4. Penambahan ekspresi di luar kuantifikasi:
   $c + (\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : E(x)) \Leftrightarrow (\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : c + E(x))$,
   dengan syarat x tidak muncul di c.
5. Perkalian ekspresi di luar kuantifikasi:
   $c\ (\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : E(x)) \Leftrightarrow (\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : c\ E(x))$,
   dengan syarat x tidak muncul di c dan $c \ge 0$.
6. Hubungan maksimum dengan universal dan eksistensi:
   $c = (\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : E(x)) \Leftrightarrow ((\exists x : D(x) : c = E(x)) \wedge (\forall x : D(x) : E(x) \le c))$.

Contoh 4.6.1

$(\underline{\text{MAX}}\ x : x = 3 : x^2) = 3^2 = 9.$

□

Contoh 4.6.2

$(\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 2 : x^2)$ adalah nilai maksimum dari x^2 di mana $x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 2$, yaitu $x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Dengan kata lain, nilai maksimum dari $\{9, 4, 1, 0\}$, yaitu 9.

Jadi, $(\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 2 : x^2) = 9$.

□

Contoh 4.6.3

Contoh pemisahan domain tanpa irisan:

$(\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 2 : x^2)$.

$= (\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 0 : x^2)\ \underline{\text{max}}\ (\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge 0 < x \leq 2 : x^2)$.

$= \underline{\text{MAX}}\{9, 4, 1, 0\}\ \underline{\text{max}}\ \underline{\text{MAX}}\{0, 1, 4\}$

$= 9\ \underline{\text{max}}\ 4 = 9$.

□

Contoh 4.6.4

Contoh pemisahan domain dengan irisan:

$(\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 2 : x^2)$.

$= (\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 1 : x^2)\ \underline{\text{max}}\ (\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x \leq 2 : x^2)$.

$= \underline{\text{MAX}}\{9, 4, 1, 0\}\ \underline{\text{max}}\ \underline{\text{MAX}}\{0, 1, 4\}$

$= 9$

□

Contoh 4.6.5

Contoh penambahan ekspresi dari luar kuantifikasi:

$5 + (\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \land -3 \leq x \leq 2 : x^2)$.

$= (\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \land -3 \leq x \leq 2 : x^2 + 5)$.

$= \underline{\text{MAX}}\{14, 9, 6, 5\}$

$= 14$.

□

4.7 Minimum

Definisi 4.7

1. **($\underline{\textbf{MIN}}$ x : $D(x)$: $E(x)$)** disebut **kuantifikasi minimum** dan dibaca "Nilai minimum dari $E(x)$ di mana x memenuhi $D(x)$", di mana
   - Simbol **MIN** disebut **kuantor minimum,**
   - variabel x disebut **dummy**,
   - predikat $D(x)$ disebut **predikat domain** dari x,
   - dan $E(x)$ adalah **ekspresi** yang mengandung variabel x.
2. Operasi biner **min** didefinisikan sebagai berikut:

$$a\ \underline{\text{min}}\ b = \begin{cases} a, & \text{jika } a \leq b \\ b, & \text{jika } b < a. \end{cases}$$

Kuantifikasi minimum menghasilkan sebuah bilangan.

Sifat-sifat 4.7 (Kuantifikasi Minimum)

1. Domain kosong:
   ($\underline{\text{MIN}}$ x : False : $E(x)) = \infty$.
2. Singelton:
   ($\underline{\text{MIN}}$ $x : x = y : E(x)) = E(y)$.
3. Pemisahan domain/Disjungsi domain:
   ($\underline{\text{MIN}}$ $x : D(x) \vee C(x)$: $E(x))$ = ($\underline{\text{MIN}}$ $x : D(x) : E(x))$ $\underline{\text{min}}$ ($\underline{\text{MIN}}$ $x : C(x) : E(x))$.
4. Penambahan ekspresi di luar kuantifikasi:
   c + ($\underline{\text{MIN}}$ $x : D(x) : E(x)) \Leftrightarrow$ ($\underline{\text{MIN}}$ $x : D(x) : c + E(x))$,
   dengan syarat x tidak muncul di c.
5. Perkalian ekspresi di luar kuantifikasi:
   c ($\underline{\text{MIN}}$ $x : D(x) : E(x)) \Leftrightarrow$ ($\underline{\text{MIN}}$ $x : D(x) : c\ E(x))$,
   dengan syarat x tidak muncul di c dan $c \geq 0$.
6. Hubungan maksimum dan minimum:
   ($\underline{\text{MAX}}$ $x : D(x) : E(x))$ + ($\underline{\text{MIN}}$ $x : D(x) : -E(x)) = 0$.
7. Hubungan minimum dengan universal dan eksistensi:
   c = ($\underline{\text{MIN}}$ $x : D(x) : E(x)) \Leftrightarrow ((\exists x : D(x) : c = E(x))$
   $\wedge\ (\forall x : D(x) : E(x) \geq c))$.

□

Contoh 4.7.2

Contoh pemisahan domain tanpa irisan:

($\underline{\text{MIN}}$ $x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 2 : -x^2$).

= ($\underline{\text{MIN}}$ $x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq x \leq 0 : -x^2$) $\underline{\text{min}}$ ($\underline{\text{MIN}}$ $x : x \in \mathbb{Z} \wedge 0 < x \leq 2 :$ x^2).

= $\underline{\text{MIN}}\{-9, -4, -1, 0\}$ $\underline{\text{min}}$ $\underline{\text{MIN}}\{0, -1, -4\}$

= -9 $\underline{\text{min}}$ $(-4) = -9$

Contoh 4.7.3

Contoh penambahan ekspresi dari luar kuantifikasi:

$5 + (\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \le x \le 2 : x^2)$.

$= (\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \le x \le 2 : x^2 + 5)$.

$= \underline{\text{MIN}}\{14, 9, 6, 5\}$

$= 5$.

□

Contoh 4.7.4

Contoh perkalian ekspresi dari luar kuantifikasi:

$2\ (\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \le x \le 2 : x^2 - 1)$.

$= (\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \le x \le 2 : 2(x^2 - 1))$.

$= (\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -3 \le x \le 2 : 2x^2 - 2)$.

$= \underline{\text{MIN}}\{16, 6, 0, -2\}$

$= -2$.

□

4.8 Gabungan

Definisi 4.8

1. **($\bigcup$ *x* : *D*(*x*) : *S*(*x*))** disebut **kuantifikasi gabungan** dan dibaca "Gabungan dari *S*(*x*) dengan *x* yang memenuhi *D*(*x*)", di mana
   - Simbol $\bigcup$ disebut **kuantor gabungan,**
   - variabel *x* disebut **dummy**,
   - predikat *D*(*x*) disebut **predikat domain** dari *x*,
   - dan *S*(*x*) adalah **himpunan**.

   Kuantifikasi gabungan menghasilkan sebuah himpunan.
2. Jika $D(x) \equiv (m \le x \le n \wedge x \in \mathbb{N})$, nilai *x* berturutan, maka:

   $$(\bigcup x : m \le x \le n \wedge x \in \mathbb{N} : S(x))$$

   $= \bigcup_{x=m}^{n} (S(x)) = \{\ y \mid y \in S(x)$ untuk paling kurang satu $x\ (m \le x \le n)\}$.

Sifat-sifat 4.8 (Kuantifikasi Gabungan)

1. Domain kosong:

   $(\bigcup x : \text{False} : S(x)) = \varnothing.$

2. Singelton:

   $(\bigcup x : x = y : S(x)) = S(y).$

3. Pemisahan domain/Disjungsi Domain:

   $(\bigcup x : D(x) \vee C(x) : S(x)) = (\bigcup x : D(x) : S(x)) \cup (\bigcup x : C(x) : S(x)).$

4. Hubungan gabungan dengan eksistensi:

   $y \in (\bigcup x : D(x) : S(x)) \Leftrightarrow (\exists x : D(x) \,;\, y \in S(x))$

Contoh 4.8.2

Misalkan $D(x) \equiv (x \in \{4, 6, 9\})$ dan misalkan
$S(x) = \{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y \leq x\}$. Maka

$$
\begin{aligned}
&(\bigcup x : x \in \{4, 6, 9\}: S(x)) \\
&= S(4) \cup S(6) \cup S(9) \\
&= \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
&\quad \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
&= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}. \\
&= S(9).
\end{aligned}
$$

□

Contoh 4.8.3

Misalkan $D(x) \equiv (x \in \text{N} \wedge 3 \le x \le 6)$ dan misalkan $S(x) = \{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge x - 2 \le y \le x\}$. Maka

$$\begin{aligned} & \bigcup_{x=3}^{6} (S(x)) \\ &= S(3) \cup S(4) \cup S(5) \cup S(6) \\ &= \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} \cup \{4, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

□

Contoh 4.8.4

Misalkan $D(x) \equiv (x \in \{8, 15, 24, 77\})$ dan $S(x) = \{ y \mid y$ faktor bulat positif dari $x\} \subseteq \mathbb{N}$. Maka

$$\begin{aligned} & (\bigcup x : x \in \{8, 15, 24, 77\} : S(x)) \\ &= S(8) \cup S(15) \cup S(24) \cup S(77) \\ &= \{1, 2, 4, 8\} \cup \{1, 3, 5, 15\} \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \\ &\quad \cup \{1, 7, 11\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 24\} \end{aligned}$$

□

4.9 Irisan

Definisi 4.9

1. $(\bigcap x: D(x) : S(x))$ disebut **kuantifikasi irisan** dan dibaca ”Irisan dari $S(x)$ dengan x yang memenuhi $D(x)$”, di mana
   - Simbol $\bigcap$ disebut **kuantor irisan,**
   - variabel x disebut **dummy**,
   - predikat $D(x)$ disebut **predikat domain** dari x,
   - dan $S(x)$ adalah **himpunan**.

   Kuantifikasi irisan menghasilkan sebuah himpunan.
2. Jika $D(x) \equiv (m \le x \le n \wedge x \in \mathbb{N})$, nilai x berturutan, maka:

$$\begin{aligned} & (\bigcap x : m \le x \le n \wedge x \in \mathbb{N} : S(x)) \\ &= \bigcap_{x=m}^{n} S(x) = \{ y \mid y \in S(x) \text{ untuk semua } x \ (m \le x \le n)\}. \end{aligned}$$

Sifat-sifat 4.9 (Kuantifikasi Irisan)

1. Domain kosong:
   $(\bigcap x : \text{False} : S(x)) = \mathscr{U}$ (himpunan semesta).
2. Singelton:
   $(\bigcap x : x = y : S(x)) = S(y)$.
3. Pemisahan domain/Disjungsi domain:
   $(\bigcap x : D(x) \vee C(x) : S(x)) = (\bigcap x : D(x) : S(x)) \cap (\bigcap x : C(x) : S(x))$.
4. Hubungan gabungan dengan universal:
   $y \in (\bigcap x : D(x) : S(x)) \Leftrightarrow (\forall x : D(x) : y \in S(x))$

Contoh 4.9.1

Misalkan $D(x) \equiv (x \in \{4, 6, 9\})$ dan $S(x) = \{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq y \leq x\}$. Maka

$$\begin{aligned}
&(\textstyle\bigcap x : x \in \{4, 6, 9\}: S(x)) \\
&= S(4) \cap S(6) \cap S(9) \\
&= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\
&\quad \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
&= \{1, 2, 3, 4\} \\
&= S(4).
\end{aligned}$$

□

Contoh 4.9.2

Misalkan $D(x) \equiv (x \in \text{N} \wedge 3 \leq x \leq 6)$ dan $S(x) = \{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq y \leq x\}$. Maka

$$\begin{aligned}
&(\textstyle\bigcup x : D(x) : S(x)) \\
&= \textstyle\bigcup_{x=3}^{6}(S(x)) \\
&= S(3) \cap S(4) \cap S(5) \cap S(6) \\
&= \{0, 1, 2, 3\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{0, 1, 2, \\
&\quad 3, 4, 5, 6\}
\end{aligned}$$

= {0, 1, 2, 3}
= $S(3)$.

□

Contoh 4.9.3

Misalkan $D(x) \equiv (x \in \mathrm{N} \wedge 3 \leq x \leq 6)$ dan $S(x) = \{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge x - 3 \leq y \leq x\}$. Maka

$(\bigcup x : D(x) : S(x))$
$= \bigcup_{x=3}^{6} (S(x))$
$= S(3) \cap S(4) \cap S(5) \cap S(6)$
$= \{0, 1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6\}$
$= \{3\}$.

□

Contoh 4.9.4

Misalkan $D(x) \equiv (x \in \{8, 15, 24, 77\})$ dan $S(x) = \{y \mid y$ faktor bulat positif dari $x\} \subseteq \mathbf{Z}^{+}$. Maka

$(\bigcup x : x \in \{8, 15, 24, 77\} : S(x))$
$= S(8) \cap S(15) \cap S(24) \cap S(77)$
$= \{1, 2, 4, 8\} \cap \{1, 3, 5, 15\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \cap \{1, 7, 11\}$
$= \{1\}$

□

4.10 Latihan Soal 4

4.1. Buktikan Sifat-sifat kuantifikasi universal berikut:

a. Pemisahan Domain/Disjungsi Predikat Domain:
$(\forall x : D(x) \vee C(x): P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : D(x) : P(x)) \wedge (\forall x : C(x) : P(x))$.

b. Disjungsi Predikat Ekspresi:
$(\forall x : D(x) : P(x)) \Rightarrow (\forall x : D(x) : P(x) \vee Q(x))$.

c. Penukaran Predikat:
$(\forall x : D(x) : \neg P(x)) \Rightarrow (\forall x : P(x) : \neg D(x))$.

4.2. Buktikan:

a. $(\forall\ x : D(x) : D(x) \vee P(x)) \Leftrightarrow$ T.

b. $(\forall\ x : D(x) \wedge P(x) : P(x)) \Leftrightarrow$ T.

c. $(\forall\ x : D(x) : \neg D(x) \vee P(x)) \Leftrightarrow (\forall\ x : D(x) : \neg D(x) \vee P(x))$.

d. $(\forall\ x : D(x) \wedge Q(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\forall\ x : \neg P(x) : \neg D(x))$.

e. $(\forall\ x : D(x) : \neg(P(x) \wedge Q(x))) \Leftrightarrow (\forall\ x : D(x) \wedge P(x) : \neg Q(x))$.

f. $(\forall\ x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\forall\ x : D(x) : D(x) \wedge P(x))$.

g. $(\forall\ x : D(x) : \neg P(x)) \Rightarrow (\forall\ x : D(x) : P(x) \rightarrow Q(x))$.

h. $(\forall\ x : D(x) : P(x)) \vee (\forall\ x : D(x) : Q(x)) \Rightarrow (\forall\ x : D(x) : P(x) \vee Q(x))$.

4.3. Buktikan Sifat-sifat kunatifikasi eksistensi berikut:

a. Pemisahan domain/Disjungsi domain:
$(\exists x : D(x) \vee C(x): P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : D(x) : P(x)) \vee (\exists x : C(x) : P(x))$.

b. Konjungsi Predikat Ekspresi:
$(\exists x : D(x) : P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x : D(x) : P(x)) \wedge (\exists x : D(x) : Q(x))$.

c. Disjungsi Predikat Ekspresi:

$(\exists x : D(x) : P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x : D(x) : P(x)) \vee (\exists x : D(x) : Q(x))$.

4.4. Buktikan:

a. $(\exists\, x : D(x) : D(x)) \Leftrightarrow$ T.

b. $(\exists\, x : D(x) : \neg D(x)) \Leftrightarrow$ F.

c. $(\exists\, x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x : D(x) : D(x) \rightarrow P(x))$.

d. $(\exists\, x : D(x) : P(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x : D(x) : P(x) \vee Q(x))$.

e. $(\exists\, x : D(x) : P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\exists\, x : D(x) \wedge P(x) : Q(x))$.

4.5. Buktikan:

a. $(\forall\, x : D(x) : P(x)) \Rightarrow (\exists\, x : D(x) : P(x))$.

b. $(\forall\, x : D(x) : P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists\, x : D(x) : P(x)) \vee (\forall\, x : D(x) : Q(x))$.

4.6. Tentukan nilai dari kuantifikasi bersarang berikut ini:

a. $(\exists\, x : x \in \mathbb{Z} : (\exists\, y : y \in \mathrm{Z} : xy = 12))$.

b. $(\forall\, x : x \in \mathbb{Z} : (\forall\, y : y \in \mathrm{Z} : (x = y) \rightarrow (2x = 2y)))$.

c. $(\forall\, x : x \in \mathbb{Z} : (\exists\, y : y \in \mathbb{Z} : y < x))$.

d. $(\forall\, x : x \in \mathbb{Z} : (\exists\, y : y \in \mathbb{Z} : x + y = 0))$.

e. $(\exists\, x : x \in \mathbb{Z} : (\forall\, y : y \in \mathrm{Z} : y < x))$.

f. $(\exists\, x : x \in \mathbb{Z} : (\forall\, y : y \in \mathrm{Z} : y - y = x)$.

4.7. Hitunglah:

a. $(\Sigma x : 2 < x \leq 2 : x)$.

b. $(\Sigma x : x \in \{0, 2, 5, 7\} : 2)$.

c. $(\Sigma x : x \in \{2, 5, 8, 11\} : x - 2)$.

d. $(\Sigma x : x \in \{1, 3, 5, 7\} : 2x) + 3$.

e. $(\Sigma x : x \in \mathrm{N} \wedge 2 \leq x \leq 6 : 2x) + (\Sigma x : x \in \mathrm{N} \wedge 5 \leq x \leq 9 : 2x)$.

f. $(\Sigma x : x \in \mathrm{N} \wedge 2 \leq x \leq 6 : x^2 + x)$.

4.8. Hitunglah:

a. $(\Sigma x : D(x) : f(x) + g(x))$, jika $(\Sigma x : D(x) : f(x)) = 6$ dan $(\Sigma x : D(x) : f(x)) = 9$.

b. $(\Sigma x : D(x) \vee C(x) : f(x))$, jika $(\Sigma x : D(x) : f(x)) = 10$, $(\Sigma x : C(x) : f(x)) = 15$, dan
$(\Sigma x : D(x) \wedge C(x) : f(x)) = 4$.

c. $(\Sigma x : D(x) : f(x))$, jika $(\Sigma x : D(x) \vee C(x) : f(x)) = 25$, $(\Sigma x : C(x) : f(x)) = 15$, dan
$(\Sigma x : D(x) \wedge C(x) : f(x)) = 7$.

d. $(\Sigma x : D(x) \wedge \neg C(x) : f(x))$, jika $(\Sigma x : D(x) \vee C(x) : f(x)) = 30$, $(\Sigma x : C(x) : f(x)) = 20$, dan $(\Sigma x : D(x) \wedge C(x) : f(x)) = 8$.

e. $(\Sigma x : D(x) : 5f(x))$, jika $(\Sigma x : D(x) : f(x)) = 6$.

4.9. Tentukan nilai dari:

a. $\sum_{x=1}^{100} (2x)$.

b. $\sum_{x=1}^{100} (2x-1)$.

c. $\sum_{x=1}^{100} \frac{1}{x(x+1)}$.

d. $\sum_{x=1}^{100} (-1)^x$.

4.10. Hitunglah:

a. $(\Sigma x : x \in \{1, 3, 5, 7\} : (\Sigma y : y \in \{2, 4, 6\} : xy))$.

b. $(\Sigma x : x \in \{1, 3, 5, 7\} : \sum_{y=1}^{x}(2y)))$.

c. $\sum_{x=1}^{5} \sum_{y=1}^{x}(2y)$.

d. $\sum_{x=1}^{5} \sum_{y=1}^{4}(xy^2)$.

4.11. Buktikan poin 2 – 7 dari Teorema 4.3.

4.12. Gunakan Teorema 4.3 untuk menghitung:

a. $\sum_{x=1}^{100} (2x+3)$.

b. $\sum_{x=1}^{100} (x^2+2x-5)$.

c. $\sum_{x=1}^{100}(x^4 + x^3 - 4x + 7)$.

d. $\sum_{x=1}^{100}(\pi^x)$.

4.13. Hitunglah:

a. $(\Pi x : x \in \{ 1, 3, 6\} : 2x)$,

b. $(\Pi x : D(x) \vee C(x) : f(x))$, jika $(\Pi x : D(x) : f(x)) = 12$, $(\Pi x : C(x) : f(x)) = 18$, dan $(\Pi x : D(x) \wedge C(x) : f(x)) = 4$.

c. $(\Pi x : D(x) : E(x))$, jika $(\Pi x : D(x) \vee C(x) : E(x)) = 100$, $(\Pi x : C(x) : E(x)) = 30$, dan $(\Pi x : D(x) \wedge C(x) : E(x)) = 6$.

4.14. Hitunglah:

a. $\prod_{x=1}^{10} (3)$.

b. $\prod_{x=1}^{10} (x + 1)$.

c. $\prod_{x=1}^{100} \frac{x}{x+1}$.

d. $\prod_{x=1}^{100} (1 + \frac{1}{x})$.

e. $\prod_{x=1}^{4} \prod_{y=1}^{x}(x + y)$.

4.15. Hitunglah:

a. $\prod_{x=1}^{100} \frac{x}{x+1}$.

b. $(\Pi x : x \in \{2, 3, 5\} : \sum_{y=1}^{x}(y))$.

c. $\sum_{x=1}^{5} \prod_{y=x}^{5}(y)$.

4.16. Hitunglah:

a. $(\# x : x \in \{2, 3, 5\} : x < 4)$.

b. $(\# x : x \in \mathbb{N} \wedge \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 16, 17\} : x + 1$ adalah genap).

c. $(\# x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 50 : x$ bilangan prima).

d. $(\# x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 50 : 60 \leq 2x \leq 100)$.

e. $(\# x : x \in \mathbb{Z} \wedge -30 \leq x \leq 30 : x$ faktor dari 60).

4.17. Hitunglah:

a. $(\# x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 30 : (\exists y : y \in \mathrm{N} : x = 3y))$.

b. $(\# x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \le x \le 30 : (\exists y : y \in \mathrm{N} : x = y^2))$.

c. $(\# x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \le x \le 100 : (\forall y : y \in \{2, 3, 4\} : y$ faktor dari $x))$.

d. $(\# x : x \in \{17, 24, 32, 36, 42, 47, 52\} : (\forall y : y \in \{3, 5\} : x \bmod y = 2))$.

4.18. Tentukan:

a. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \{-5, -3, 1, 2, 3, 4\} : x)$.

b. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \{-5, -3, 1, 2, 3, 4\} : x^2)$.

c. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -10 \le x \le 10 : -x)$.

d. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \le x \le 10 : x^2 + 6x + 9)$.

e. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : -x^2 - 2x - 1)$.

4.19. Tentukan:

a. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : f(x))$, jika $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 0 : f(x)) = -7$ dan $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 0 : f(x)) = -5$.

b. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \{1, 3, 5\} : f(x))$, jika $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge 0 \le x \le 6 : f(x)) = 7$ dan $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : x \in \{0, 2, 4, 6\} : f(x)) = 4$.

c. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : D(x) : f(x) - 8)$, jika $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : D(x) : f(x)) = 24$.

d. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : D(x) : f(x))$, jika $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : D(x) : 5f(x)) = 120$.

e. $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : D(x) : f(x))$, jika $(\underline{\mathrm{MAX}}\ x : D(x) : 2\text{-}f(x)) = 12$.

4.20. Tentukan:

a. $(\underline{\mathrm{MIN}}\ x : x \in \{-5, -3, 1, 2, 3, 4\} : x)$.

b. $(\underline{\mathrm{MIN}}\ x : x \in \{-5, -3, 1, 2, 3, 4\} : x^2)$.

c. $(\underline{\mathrm{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -10 \le x \le 10 : -x)$.

d. $(\underline{\mathrm{MIN}}\ x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \le x \le 10 : x^2 + 6x + 9)$.

e. $(\underline{\mathrm{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : -x^2 - 2x - 1)$.

4.21. Tentukan:

a. $(\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : f(x))$, jika $(\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 0 : f(x)) = 7$ dan $(\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 0 : f(x)) = 5$.

b. $(\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \{1, 3, 5\} : f(x))$, jika $(\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge 0 \le x \le 6 : f(x)) = 7$ dan
$(\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \{0, 2, 4, 6\} : f(x)) = 4$.

c. $(\underline{\text{MIN}}\ x : D(x) : 6 - f(x))$, jika $(\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : f(x)) = 4$.

d. $(\underline{\text{MIN}}\ x : D(x) : f(x))$, jika $(\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : -5f(x)) = 20$.

e. $(\underline{\text{MIN}}\ x : D(x) : f(x)) + (\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : g(x))$,
jika $(\underline{\text{MAX}}\ x : D(x) : -f(x)) = -4$ dan $(\underline{\text{MIN}}\ x : D(x) : -g(x)) = 9$.

f. $(\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : x^2 - 4x)\ \underline{\text{max}}\ (\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : -x^2 + 4x)$.

g. $(\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : x^2 - 4x)\ \underline{\text{min}}\ (\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : -x^2 + 4x)$.

h. $(\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : x^2 - 2x)\ \underline{\text{min}}\ (\underline{\text{MAX}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : 2x + x^2)$.

i. $(\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : x - 2)\ \underline{\text{max}}\ (\underline{\text{MIN}}\ x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x \le 5 : 4 - x)$.

4.22. Tentukan kuantifikasi gabungan $(\bigcup x : x \in \{2, 4, 6, 10\} : S(x))$, untuk masing-masing $S(x)$ berikut:

a. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge 1 \le y \le x\}$.

b. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge 1 \le 2y \le x\}$.

c. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge x - 2 \le y \le x\}$.

d. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y$ faktor dari $x\}$.

4.23. Tentukan $\bigcup_{x=1}^{5} S(x)$, untuk masing-masing $S(\text{x})$ berikut:

a. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge x + 1 \le y \le 5\}$.

b. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y$ bilangan ganjil kurang dari $x\}$.

c. $\{y \mid y$ bilangan prima kurang dari $x\}$.

d. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y \le x \wedge (\exists z : z \in \mathbb{N} : 2z = y)\}$.

4.24. Tentukan kuantifikasi gabungan $(\bigcap x : x \in \{2, 4, 6, 10\} : S(x))$, untuk masing-masing $S(x)$ berikut:

a. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y \leq 10\}$.

b. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq 2y \leq x\}$.

c. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge x - 2 \leq y \leq x\}$.

d. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y$ faktor dari $x\}$.

e. $\{xy \mid y \in \mathbb{N} \wedge y \leq 5\}$.

4.25. Tentukan $\bigcap_{x=1}^{8} S(x)$ untuk masing-masing S(x) berikut:

a. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge x + 1 \leq y \leq 8\}$.

b. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y$ bilangan genap kurang dari $x\}$.

c. $\{y \mid y$ bilangan prima kurang dari $x\}$.

d. $\{y \mid y$ faktor dari $x\}$.

e. $\{y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y \leq x \wedge (\exists z : z \in \mathbb{N} : 2z + 1 = y)\}$.

4.26. Tentukan:

a. $(\bigcap x : x \in \{1, 3, 5\} : \bigcup_{y=1}^{2x} \{y\})$.

b. $(\bigcup x : x \in \{1, 3, 5\} : \bigcap_{y=1}^{x} \{y\})$.

c. $\bigcap_{x=1}^{5} \bigcup_{y=1}^{x} \{2y\}$.

Bab 5

Aljabar Boolean

No matter how correct a mathematical theorem may appear to be,
one ought never to be satisfied that there was not something
imperfect about it until it also gives the impression
of being beautiful.

George Boole (1815 – 1864)
English mathematician, philosopher and logician.

Aljabar himpunan dan aljabar proposisi logika memiliki banyak kemiripan, di mana $\varnothing$ berperan sebagai F, himpunan semesta $\mathscr{U}$ sebagai T, serta operasi ^{c}, $\cup$ dan $\cap$ berperan berturut-turut sebagai $\neg$, $\vee$, dan $\wedge$. Kemiripan ini memunculkan sebuah struktur aljabar yang lebih umum yang dinamakan Aljabar Boolean.

Aljabar Boolean diperkenalkan oleh George Boole (1815 – 1864), seorang ahli Matematika dan logika, serta filsuf Inggris. Studi tentang Aljabar Boolean kemudian dikembangkan oleh beberapa ahli, antara lain oleh fisikawan Ameraka Maurice Karnaugh (1924 - ...) yang menghasilkan penyederhanaan ekspresi Boolean, oleh fisikawan Amerika lainnya W.V. Quine (1908-2000) dan Edward J. McCluskey (1929 - ...) yang menghasilkan metode peminimalan ekspresi Boolean, serta matematikawan dan insinyur elektro Claude E. Shannon (1916 – 2001) yang menerapkan aljabar Boolean pada rangkaian digital.

Bab ini akan diawali dengan definisi aljabar Boolean, kemudian diikuti dengan ekspresi Boolean, dualitas, fungsi Boolean, serta penyederhanaan dengan menggunakan peta Karnaugh dan metode Quine-McCluskey.

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan pembaca dapat menjelaskan definisi aljabar Boolean, dapat memberikan berbagai contoh aljabar Boolean, dapat melakukan penyederhanaan dan peminimalan akspresi Boolean, serta dapat merancang rangkaian digital berdasarkan ekspresi Boolean.

5.1 Definisi Aljabar Boolean

Definisi 5.1

Sebuah **Aljabar Boolean** adalah tupel-6 **(*B* , + , . , ' , 0 , 1)**, di mana B adalah himpunan dengan $\{0, 1\} \subseteq B$, sedangkan **+** dan **.** masing-masing adalah operator biner, serta **'** adalah operator uner, yang memenuhi aksioma-aksioma berikut ini: Untuk semua a, b, $c \in B$:

1. **Identitas**

   $0 + a = a$ $\qquad$ $1 \cdot a = a$

   Anggota 0 disebut **nol**, dan 1 disebut **unit**.

2. **Komplemen**

   Untuk setiap $a \in B$ terdapat $a' \in B$ yang disebut **komplemen** dari a, sehingga

   $a + a' = 1$

   $a \cdot a' = 0$

3. **Komutatif**

   $a + b = b + a$

   $a \cdot b = b \cdot a$

4. **Asosiatif**

   $(a + b) + c = a + (b + c)$

   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

5. **Distributif**

   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

   $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

Teorema 5.1 Hukum-hukum Aljabar Boolean

Untuk semua $x, y \in B$ dalam **Aljabar Boolean** (**B , + , . , ' , 0 , 1**) berlaku:

a. **Idempoten**

$x + x = x$ $\qquad$ $x \cdot x = x$

b. **Involusi**

$(x')' = x$

c. **Komplemen Identitas**

$(1)' = 0$ $\qquad$ $(0)' = 1$

d. **Dominasi**

$x + 1 = 1$ $\qquad$ $x \cdot 0 = 0$

e. **Absorpsi**

$x + (x \cdot y) = x$ $\qquad$ $x \cdot (x + y) = x$

f. **De Morgan**

$(x + y)' = x' \cdot y'$ $\qquad$ $(x \cdot y)' = x' + y'$

Teorema 5.2 Keunikan komplemen

Untuk semua $x \in B$, komplemen x' adalah unik dengan sifat-sifatnya, yaitu:

$$x + x' = 1 \text{ dan } x \cdot x' = 0.$$

Contoh 5.1.1

$\mathscr{B} = (B\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ '\ ,\ 0\ ,\ 1) = (\{T, F\}, \vee, \wedge, \neg, F, T)$ adalah aljabar Boolean dengan

- $B = \{T, F\}$, di mana T adalah *true* dan F adalah *false*.
- $\vee$ adalah operator disjungsi,
- $\wedge$ adalah operator konjungsi,
- $\neg$ adalah negasi.

□

Contoh 5.1.2

$\mathscr{B} = (B\ ,\ +\ ,\ .\ ,\ '\ ,\ 0\ ,\ 1) = (\{S,\ \varnothing\}, \cup, \cap,\ ^{c}, \varnothing, S)$ adalah aljabar Boolean dengan

- $B = \{S, \varnothing\}$, di mana S adalah himpunan tak kosong dan $\varnothing$ adalah himpunan kosong,
- $\cup$ adalah operator gabungan,
- $\cap$ adalah operator irisan,
- ^{c} adalah komplemen,

□

Contoh 5.1.3

$\mathscr{B} = (\mathscr{P}(S), \cup, \cap,\ ^{c}, \varnothing, S)$ adalah aljabar Boolean, dimana

- $\mathscr{P}(S)$ adalah himpunan kuasa (himpunan dari semua himpunan bagian) dari himpunan tak kosong S,
- $\cup$ adalah operator gabungan,
- $\cap$ adalah operator irisan,
- ^{c} adalah komplemen,
- $\varnothing$ adalah himpunan kosong,
- S himpunan tak kosong.

Misalkan $S = \{a, b, c\}$. Maka $\mathscr{P}(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

□

Contoh 5.1.4

Untuk $M \in \mathbb{N}^{+}$ dan tidak mengandung faktor kuadrat, $\mathscr{B} = (S(M)$, kpk, fpb, $M/$, $1, M)$, adalah aljabar Boolean, dimana

- $S(M) = \{a \mid a \in \mathbb{N}^{+}$ dan a adalah pembagi dari $M\}$,
- kpk adalah kelipatan persekutuan terkecil,
- fpb adalah faktor persekutuan terbesar,

- *M*/ adalah pembagian terhadap *M*.
- 1 adalah bilangan 1.

Misalkan M = 30 (30 tidak memiliki faktor kuadrat). Maka $S(30)$ = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} dan $\mathcal{B}$ = ({1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, kpk, fpb, 30/ , 1, 30). Pemenuhan syarat-syarat untuk aljabar Boolean adalah sebagai berikut:

Misalkan $x, y \in S(30)$. Maka

a. Idempoten:
   kpk(x, x) = x dan fpb(x, x) = x
b. Involusi:
   30/(30/x) = x
c. Komplemen Identitas:
   30/30 = 1 dan 30/1 = 30.
d. Dominasi:
   kpk(30, x) = 30, karena x adalah pembagi 30, dan fpb(x, 1) = 1.
e. Absorpsi:
   kpk(x, fpb(x, y)) = x dan fpb(x, kpk(x, y)) = x
   Contoh: kpk(10, fpb(10, 6)) = kpk(20, 2) = 10, dan
   fpb(10, kpk(10, 6)) = fpb(10, 30) = 10.
f. De Morgan
   30/(kpk(x, y)) = fpb(30/x, 30/y) dan 30/fpb(x, y) = kpk(30/x, 30/y)
   Contoh: 30/kpk(10, 6) = 30/30 = 1 = fpb(3, 5) = fpb(30/10, 30/6), dan
   30/fpb(10, 6) = 30/2 = 15 = kpk(3, 5)
   = kpk(30/10, 30/6).

□

Contoh 5.1.5

Buktikan hukum Idempoten dari Teorema 7.1 (a): $x + x = x$

Jawab:

Bukti:

$x + x$

$= (x + x) \,.\, 1$	Identitas
$= (x + x) \,.\, (x + x')$	Komplemen
$= x + (x \,.\, x')$	Distributif
$= x + 0$	Komplemen
$= x$	Identitas

□

Contoh 5.1.6

Buktikan hukum Dominasi dari Teorema 7.1 (d): $x + 1 = 1$

Jawab:

Bukti:

$x + 1$

$= x + (x + x')$	Komplemen
$= (x + x) + x'$	Asosiatif
$= x + x'$	Idempoten
$= 1$	Komplemen

□

Contoh 5.1.7

Buktikan hukum Absorpsi dari Teorema 7.1 (e): $x + (x \,.\, y) = x$

Jawab:

Bukti:

$x + (x.\, y)$

$= (x \,.\, 1) + (x \,.\, y)$	Identitas
$= x \,.\, (1 + y)$	Distributif
$= x \,.\, 1$	Dominasi
$= x$	Identitas

□

Contoh 5.1.8

Buktikan Teorema 7.2 yaitu keunikan komplemen x' dengan sifat-sifat:

$x + x' = 1$ dan $x \,.\, x' = 0$.

Jawab:

Bukti:

Misalkan $x', x^* \in B$, sehingga $x + x' = 1$, $x \,.\, x' = 0$, dan $x + x^* = 1$, $x \,.\, x^* = 0$. Maka:

$x' = x' \,.\, 1$	Identitas
$= x' \,.\, (x + x^*)$	Sifat komplemen, asumsi.
$= x' \,.\, x + x'.\, x^*$	Distributif
$= x \,.\, x' + x'.\, x^*$	Komutatif

$= 0 + x'.\ x^*$	Sifat komplemen, asumsi.
$= x'.\ x^*$	Identitas.

Di sisi lain,

$x^* = x^*\ .\ 1$	Identitas
$= x^*\ .\ (x + x')$	Sifat komplemen, asumsi.
$= x^*\ .\ x + x^*\ .\ x'$	Distributif
$= x\ .\ x^* + x^*\ .\ x'$	Komutatif
$= 0 + x^*\ .\ x'$	Sifat komplemen, asumsi.
$= x^*\ .\ x'$	Identitas
$= x'\ .\ x^*$	Komutatif.

Sehingga

$x' = x'.\ x^* = x^*.$

5.2 Ekspresi Boolean

Definisi 5.2

Misalkan $\mathscr{B} = (B\ , +\ , .\ , '\ , 0\ , 1)$ adalah aljabar Boolean. Maka:

1. **Variabel Boolean** x di $\mathscr{B}$ adalah variabel yang hanya mengambil nilai dari B.
2. **Ekspresi Boolean** di $\mathscr{B}$ adalah:
   - Setiap $a \in B$,
   - Setiap variabel Boolean x di $\mathscr{B}$,
   - Jika E_1 dan E_2 adalah ekspresi Boolean di $\mathscr{B}$, maka $E_1 + E_2$, $E_1\ .\ E_2$, E_1', dan (E_1) masing-masing adalah ekspresi Boolean di $\mathscr{B}$.
3. Dua ekspresi Boolean E_1 dan E_2 dikatakan **ekivalen** jika keduanya memiliki nilai yang sama untuk setiap kombinasi nilai dari variabel-variabelnya.
4. Jika E_1 dan E_2 ekivalen, maka $E_1 = E_2$ dinamakan **persamaan Boolean**.

Contoh 5.2.1

Misalkan $\mathscr{B}$ = ({T, F}, $\vee$, $\wedge$, $\neg$, F, T) dan x, y adalah variabel Boolean di $\mathscr{B}$. Maka:

- T
- F
- $x \wedge$ T
- $x \vee y$
- $(\neg x \vee y) \wedge x$

masing-masing adalah ekspresi Boolean.

□

Contoh 5.2.2

Misalkan $\mathscr{B} = (\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}, \cup, \cap, {}^{c}, \varnothing, \{a, b, c\})$ dan x, y adalah variabel Boolean di $\mathscr{B}$. Maka:

- $\{a\}$
- $\{a, c\}$
- $\{a, b\}^c$
- $x \cup \{a, b\}$
- $x \cap y$
- $(\{a, b\} \cup x^c \cap y\}$

masing-masing adalah ekspresi Boolean.

□

Contoh 5.2.3

Tunjukkan bahwa ekspresi Boolean $xy + xy'$ dan ekspresi Boolean x adalah ekivalen.

Jawab:

$xy' + xy$	$= x(y' + y)$	,	Distributif
	$= x(y + y')$	,	Komutatif
	$= x1$	,	Komplemen
	$= x$	,	Identitas

Sehingga $xy + xy'$ ekivalen dengan x, dan karena itu $xy + xy' = x$ adalah persamaan Boolean.

□

Contoh 5.2.4

Tunjukkan bahwa ekspresi Boolean $x + x'y$ dan ekspresi Boolean $x + y$ adalah ekivalen.

Jawab:

$x + x'y$	$= (x + x')(x + y)$	,	Distributif
	$= 1(x + y)$	,	Komplemen
	$= x + y$	,	Identitas

Sehingga $x + x'y$ ekivalen dengan $x + y$, dan karena itu $x + x'y = x + y$ adalah persamaan Boolean.

□

5.3 Prinsip Dualitas

Definisi 7.3

Ekspresi Boolean E^* dinamakan **dual** dari ekspresi Boolean E, jika E^* diperoleh dari E dengan menukarkan 0 dengan 1, menukarkan **.** dengan + dan menempatkan tanda kurung pada tempat yang sesuai.

Teorema 5.3

Misalkan T adalah teorema aljabar Boolean yang valid. Maka jika semua 0 ditukarkan dengan 1 dan sebaliknya, dan semua + ditukarkan dengan **.** dan sebaliknya, maka diperoleh teorema aljabar Boolean yang juga valid.

Contoh 5.3.1

$0 + xy$ adalah dual dari $1(x + y)$ dan $(x + y)(x + y')$ adalah dual dari $xy + xy'$.

□

Contoh 5.3.2

Buktikan: $(x + y) . (x + y') = x$.

Jawab:

Pada Contoh 5.2.3 telah dibuktikan bahwa $xy + xy' = x$ valid.

Persamaan $(x + y)(x + y') = x$ adalah dual dari $xy + xy' = x$. Karena itu, berdasarkan Teorema 5.3, maka $(x + y)(x + y') = x$ juga valid.

□

Contoh 5.3.3

Buktikan: $x(x' + y) = xy$.

Jawab:

Dual dari $x(x' + y) = xy$ adalah $x + x'y = x + y$ yang telah dibuktikan pada Contoh 7.2.4.

□

5.4 Fungsi Boolean

Definisi 5.4

Misalkan $\mathscr{B} = (\mathbf{B}, +, \cdot, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ adalah aljabar Boolean. Maka

1. Fungsi Boolean f adalah $f : B^n \rightarrow B$.
2. Fungsi biner orde n adalah fungsi $f : B^n \rightarrow B$, dimana $B = \{0, 1\}$.
3. Jika f dan g adalah fungsi Boolean $B^n \rightarrow B$ dan $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, maka
   - $(f + g)(\underline{b}) = f(\underline{b}) + g(\underline{b})$, penjumlahan fungsi.
   - $(f \cdot g)(\underline{b}) = f(\underline{b}) \cdot g(\underline{b})$, perkalian fungsi.
   - $f'(\underline{b}) = (f(\underline{b}))'$, kompleman fungsi

Berikut hukum-hukum tentang fungsi Boolean.

Teorema 5.4 (Hukum-hukum fungsi Boolean)

Misalkan f, g, h adalah fungsi Boolean $B^n \rightarrow B$. Maka:

1.	$0 + f = f$	Identitas
2.	$f + f' = 1$	Komplemen
3.	$f + g = g + f$	Komutatif
4.	$(f + g) + h = f + (g + h)$	Asosiatif
5.	$f(g + h) = fg + fh$	Distributif
6.	$f + f = f$	Idempoten
7.	$(f')' = f$	Involusi
8.	$f + 1 = 1$	Dominasi
9.	$f + fg = f$	Absorpsi
10.	$(f + g)' = f'g'$	De Morgan

Dual masing-masing persamaan 1 – 10.

Contoh 5.4.1

Berikut ini adalah contoh-contoh fungsi Boolean:

- $f : B \rightarrow \{0\}$, dimana $f(x) = 0$,
- $f : B \rightarrow B$, dimana $f(x) = x$,
- $f : B^2 \rightarrow B$, dimana $f(x, y) = xy$,

- $f : B^3 \rightarrow B$, dimana $f(x, y, z) = x + y'z$

□

Contoh 5.4.2

Misalkan $f : B^2 \rightarrow B$, dimana $f(x, y) = xy$ dan $g : B^2 \rightarrow B$, dimana $g(x, y) = x + y$. Maka

- $(f + g)(x, y) = (xy) + (x + y) = xy + x + y$.
- $(f\,g)(x, y) = (xy)\,(x + y) = xy(x + y)$.
- $g'(x, y) = (x + y)'$.

□

Contoh 5.4.3

Misalkan $f : B^3 \rightarrow B$ dengan $B = \{0, 1\}$, dimana $f(x, y, z) = x + yz$. Maka f dapat ditentukan dengan mengevaluasinya pada tabel kebenaran berikut:

Tabel 5.4.1: Tabel kebenaran $x + yz$.

x	y	z	yz	$F(x, y, z) = x + yz$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

□

5.5 Bentuk Kanonik

Definisi 7.5

Misalkan $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, adalah himpunan variabel Boolean. Maka:

1. Setiap variabel x_i atau komplemennya x_i' disebut **literal**;
2. Perkalian n literal $y_1y_2y_3 \ldots y_n$ dimana $y_i \in \{x_i, x_i'\}$ disebut ***minterm*** pada S.
3. Dual dari minterm disebut **maxterm** pada S.
4. Penjumlahan minterm disebut **bentuk normal disjungtif** (*disjunctive normal form, dnf*).
5. Komponen yang dijumlahkan penjumlahan disebut **suku** (*term*).
6. Dual dari bentuk normal disjungtif disebut **bentuk normal konjungtif** (*conjunctive normal form, cnf*).
7. Ekspresi Boolean dalam bentuk normal dinjungtif atau dualnya, disebut dalam bentuk **kanonik**.

Konversi sebuah ekspresi Boolean E ke dalam bentuk normal disjungtif dapat dilakukan dengan dua cara yaitu:

a. Tabel Kebenaran.
   - Identifikasi semua baris dimana E bernilai 1.
   - Identifikasi nilai setiap variabel x_i ($1 \leq i \leq n$) pada baris dimana E bernilai 1 dan buatlah minterm $y_1y_2y_3 \ldots y_n$ sebagai berikut:
     Jika $x_i = 0$ maka $y_i = x_i'$
     Jika $x_i = 1$ maka $y_i = x_i$
   - Jumlahkan semua minterm yang berkorenspondensi dengan baris dimana E bernilai 1.

b. Algoritma 5.5 di bawah ini.

Algoritma 5.5

Konversi ekspresi Boolean ke bentuk normal disjungtif.

Pre : $S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \wedge E_1$ adalah ekspresi Boolean.

Post : Bentuk normal disjungtif E_2 pada S yang ekivalen dengan E_1.

1. Pindahkan semua komplemen di luar kurung pada ekspresi Boolean E_1 ke dalam kurung dengan menggunakan hukum De Morgan.
2. Gunakan hukum involusi untuk mereduksi komplemen yang genap menjadi tanpa komplemen dan komplemen ganjil menjadi satu komplemen ($x''' = x$ dan $x'''' = x$).
3. Dengan menggunakan hukum distributif, perkalian dari penjumlahan dijadikan penjumlahan perkalian.

4. Gunakan hukum komutatif, hukum idempoten, dan hukum komplemen untuk mentrasformasikan setiap perkalian menjadi 0 atau perkalian literal.
5. Dengan menggunakan hukum Identitas, hilangkan 0. Jika sebuah suku termasuk di dalam suku lain, gunakan hukum Absorpsi untuk menghilangkan salah satunya.
6. Jika ada suku yang bukan minterm, misalnya variabel $x \in S$ belum ada dalam suku, maka kalikan suku itu dengan $(x + x')$ dan gunakan hukum Distributif dan Komutatif untuk mendapatkan hasil akhir bentuk normal disjungtif E_2 pada S yang ekivalen dengan E_1.

□

Contoh 5.5.1

Expresi x, x', y, z' masing-masing adalah literal.

□

Contoh 5.5.2

$S = \{x, y, z\}$. Maka

- xyz
- $xy'z'$
- $x'y'z'$

semuanya adalah minterm pada S. Sedangkan

- x
- xy'
- $x'yzz'$

semuanya bukan minterm pada S, karena tidak mengandung seluruh literal masing-masing variabel atau terdapat pengulangan variabel.

□

Contoh 5.5.3

$S = \{x, y, z\}$. Maka dual dari minterm pada Contoh 7.5.2 adalah

- $x + y + z$
- $x + y' + z'$
- $x' + y' + z'$

semuanya adalah maxterm pada S. Sedangkan

- $x + y$ (z tidak ada)
- $y + z'$ (x tidak ada).

semuanya bukan maxterm pada S.

□

Contoh 5.5.4

- $f(x, y, z) = xyz + xy'z + x'y'z$, adalah bentuk normal disjungtif.
- $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x'+ y'+ z)$, adalah bentuk normal konjungtif.

Keduanya adalah bentuk kanonik.

□

Contoh 5.5.5

Misalkan $S = \{x, y, z\}$. Konversikan, dengan menggunakan tabel kebenaran, ekspresi Boolean $(xy')'(x + x'z)'$ menjadi bentuk normal disjungtif pada S.

<u>Jawab</u>:

Tabel 5.5.1: Tabel kebenaran $(xy')'(x + x'z)'$.

x	y	z	y'	xy'	$(xy')'$	x'	$x'z$	$x+x'z$	$(x+x'z)'$	$(xy')'(x+x'z)'$
0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Pada kolom terakhir, entri 1 terdapat pada baris pertama ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) yang koresponden dengan $x'y'z'$ dan pada baris ketiga ($x = 0$, $y = 1$, $z = 0$) yang koresponden dengan $x'yz'$. Sehingga, ekspresi dalam bentuk normal disjungtif adalah: $x'y'z' + x'yz'$.

□

Contoh 5.5.6

Misalkan $S = \{x, y, z\}$. Konversikan, dengan menggunakan Algoritma 5.5, ekspresi Boolean $(xy')'(x + x'z)'$ menjadi bentuk normal disjungtif pada S.

Jawab:

Dengan mengikuti langkah-langkah pada Algoritma 5.5, diuraikan sebagai berikut:

1. Pindahkan semua komplemen di luar kurung ke dalam kurung dengan menggunakan hukum De Morgan:

$(xy')'(x + x'z)'$

$= (x' + y'')\, x'(x'z)'$

$= (x' + y'')\, x'(x'' + z')$

2. Gunakan hukum involusi untuk mereduksi komplemen: komplemen genap menjadi tanpa komplemen dan komplemen ganjil menjadi satu komplemen:

$= (x' + y)\, x'(x + z')$

3. Dengan menggunakan hukum distributif, perkalian dari penjumlahan dijadikan penjumlahan perkalian.

$= (x' + y)\,(x'x + x'z')$

$= x'(x'x + x'z') + y(x'x + x'z')$

$= x'x'x + x'x'z' + y\,x'x + y\,x'z'$

4. Gunakan hukum komutatif, hukum idempoten, dan hukum komplemen untuk mentrasformasikan setiap perkalian menjadi 0 atau perkalian literal.

$= x'x + x'z' + y\,x'x + y\,x'z'$, Idempoten

$= x\,x' + x'z' + y\,x\,x' + y\,x'z'$, Komutatif

$= 0 + x'z' + y\,0 + y\,x'z'$, Komplemen

$= 0 + x'z' + 0 + y\,x'z'$, Dominasi

5. Dengan menggunakan hukum Identitas, hilangkan 0. Jika sebuah suku termasuk di dalam suku lain, gunakan hukum Absorpsi untuk menghilangkan salah satunya.

   = $x'z' + y\,x'z'$, Identitas

   = $x'z' + x'z'\,y$, Komutatif

   = $x'z'$, Absorpsi
6. Jika ada suku yang bukan minterm, misalnya variabel y belum ada dalam suku, maka kalikan suku itu dengan (y + y') dan gunakan hukum Distributif dan Komutatif untuk emndapatkan hasil akhir.

   = $x'z'\ (y + y')$, Dominasi

   = $x'z'y + x'z'y'$, Distributif

   = $x'yz' + x'y'z'$. , Komutatif

Ekspresi Boolean $x'yz' + x'y'z'$ adalah bentuk normal disjungtif pada $S = \{x, y, z\}$.

□

5.6 Peta Karnaugh

Definisi 5.6

1. Jika E_1 dan E_2 adalah bentuk disjungtif, maka E_1 disebut **lebih sederhana** dari E_2 jika E_1 memiliki lebih sedikit suku dan memiliki tidak lebih banyak literal daripada E_2 atau memiliki lebih sedikit literal dan tidak lebih banyak suku daripada E_2.
2. **Peta Karnaugh** adalah tabel dengan isi sel adalah minterm untuk menyederhanakan ekspresi Boolean..

Peta Karnaugh (atau sering disebut K-map) yang diperkenalkan oleh Maurice Karnaugh pada 1953, adalah metode untuk menyederhanakan ekspresi Boolean.

Algoritma 5.6

Penyederhanaan bentuk normal disjungtif dengan peta Karnaugh.
Pre : Bentuk normal disjungtif E_1.
Post : Ekspresi Boolean E_2 yang lebih sederhana dan ekivalen dengan E_1.

1. Buatlah tabel sebagai berikut:
   - Untuk 2 variabel, jadikan salah satu variabel dan komplemennya sebagai label baris dan variabel lainnya beserta komplemennya sebagai label kolom.
   - Untuk 3 variabel, jadikan salah satu variabel dan komplemennya sebagai label baris dan kombinasi dua variabel lainnya masing-masing beserta komplemennya sebagai label kolom. Aturlah sedemikian rupa, sehingga label kolom yang berdampingan memiliki literal sekutu.
   - Untuk 4 variabel, jadikan kombinasi dua variabel dan komplemen masing-masing sebagai label baris dan kombinasi dua variabel lainnya masing-masing beserta komplemennya sebagai label kolom. Aturlah sedemikian rupa, sehingga label baris yang berdampingan memiliki literal sekutu. Begitu juga kolom yang berdampingan.
2. Untuk setiap minterm dalam ekspresi bentuk normal disjungtif E_1, tandai dengan "1" pada sel dimana perkalian antara label baris dan label kolomnya sama dengan minterm tersebut.

3. Buatkan kotak-kotak berukuran $2^m \times 2^n$ $((m, n \in \mathbb{N}^+ \wedge n \geq 2) \vee (m, n \in \mathbb{N}^+ \wedge m \geq 2))$ agar setiap sel yang berisi "1" tercakup di dalam sebuah kotak. Kotak bisa tumpang tindih. Kotak hanya bisa mengcakup sel bermuatan "1" yang bertetangga secara vertikal atau horisontal tapi tidak diagonal.
4. Untuk setiap kotak, jumlahkan semua minterm yang direpresentasikan oleh sel-sel dalam satu kotak ke dalam bentuk normal disjungtif.
5. Jika dalam penjumlahan bentuk normal disjungtif yang mewakili sebuah kotak terdapat dua suku αx dan $\alpha x'$, dimana α adalah perkalian literal, maka gantilah kedua suku tersebut dengan α. Ulangi ini sampai tidak ada dua suku dalam bentuk seperti ini.
6. Jumlahkan semua perkalian dasar yang sisa dari setiap kotak. Hasilnya adalah ekspresi sederhana E_2 yang ekivalen dengan E_1.

□

A. Peta Karnaugh dengan 2 variabel.

Untuk 2 variabel x, y, peta Karnaugh seperti di bawah ini:

	y	***y'***
x	*xy*	*xy'*
x'	*x'y*	*x'y'*

Misalkan E adalah sebuah bentuk normal disjungtif. Maka penyajian E pada peta Karnaugh adalah dengan mencantumkan nilai "1" pada sel dari midterm yang bersesuaian dengan suku dari E.

Contoh 5.6.1

Bentuk normal disjungtif $xy' + x'y$ disajikan pada peta Karnaugh di bawah ini:

	y	***y'***
x		1
x'	1	

□

Contoh 5.6.2

Sederhanakan bentuk normal disjungtif $xy' + x'y'$, dan $xy + x'y'$, serta $xy + x'y + x'y + x'y'$ dengan menggunakan peta Karnaugh.

<u>Jawab</u>:

Penyajian ketiga ekspresi tersebut berturut-turut adalah:

	y	***y'***
x		1
x'		1

	y	***y'***
x	1	
x'		1

	y	***y'***
x	1	1
x'	1	1

- Terdapat kotak 2×1 yang adalah representasi dari $xy' + x'y'$. Literal yang sama pada kotak adalah y', sehingga $xy' + x'y'$ dapat diganti dengan y'.
- Tidak terdapat kotak $2^m \times 2^n$ $((m, n \in \mathbb{N}^+ \wedge n \geq 2) \vee (m, n \in \mathbb{N}^+ \wedge m \geq 2))$. Yang ada hanya sel 1×1. Sehingga $xy + x'y'$ tidak dapat disederhanakan.
- Terdapat kotak 2×2 yang yang mencakup semua sel. Maka $xy + x'y + x'y + x'y' = 1$.

□

B. Peta Karnaugh dengan 3 variabel.

Untuk 3 variabel x, y, z, peta Karnaugh adalah sebagai berikut:

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x				
x'				

Contoh 5.6.3

Sederhanakan bentuk normal disjungtif: $xyz' + xy'z + xy'z'$.

<u>Jawab</u>:

Bentuk normal disjungtif $xyz' + xy'z + xy'z'$ disajikan pada peta Karnaugh di bawah ini:

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
x		1	1	1
x'				

Sel yang bernilai 1 membentuk kotake ukuran 1 × 3, jadi bukan merupakan kotak berukuran $2^m \times 2^n$, sehingga harus dijadikan 2 kotak 1 × 2 dengan 1 sel tumpang tindih. Kotak kiri menghasilkan xz' dan kotak kanan menghasilkan xy'. Sehingga $xyz' + xy'z + xy'z' = xz' + xy'$.

□

Contoh 5.6.4

Sederhanakan bentuk normal disjungtif: $xyz + xyz' + x'yz'$.

Jawab:

Bentuk normal disjungtif *xyz* + *xyz*'+ *x*'*yz*' disajikan pada peta Karnaugh di bawah ini:

	yz	*yz*'	*y*'*z*'	*y*'*z*
x	1	1		
x'		1		

Diperoleh 1 kotak ukuran 1 × 2 dan 1 kotak ukuran 2 × 1 yang tumpang tindih pada satu kotak. Kotak ukuran 1 × 2 menghasilkan *xy* dan kotak 2 × 1 menghasilkan *yz*'. Sehingga diperoleh: *xyz* + *xyz*'+ *x*'*yz*' = *xy* + *yz*'.

□

Contoh 5.6.5

Sederhanakan ekspresi bentuk normal disjungtif: *xyz*'+ *xy*'*z*'+ *x*'*yz* + *x*'*yz*'+ *x*'*y*'*z*'+ *x*'*y*'*z*.

Jawab:

Bentuk normal disjungtif *xyz*'+ *xy*'*z*'+ *x*'*yz* + *x*'*yz*'+ *x*'*y*'*z*'+ *x*'*y*'*z* disajikan pada peta Karnaugh di bawah ini:

	yz	*yz*'	*y*'*z*'	*y*'*z*
x		1	1	
x'	1	1	1	1

Diperoleh 1 kotak ukuran 1 × 2 (yang dibentuk oleh sel kiri bawah bersama dengan sel kanan bawah) dan 1 kotak ukuran 2 × 2. Kotak ukuran 1 × 2 menghasilkan *x*'*z* dan kotak 2 × 2 menghasilkan *z*' dan. Sehingga diperoleh: *xyz*'+ *xy*'*z*'+ *x*'*yz* + *x*'*yz*'+ *x*'*y*'*z*'+ *x*'*y*'*z* = *x*'*z* + *z*'.

□

C. Peta Karnaugh dengan 4 variabel.

Untuk 4 variabel w, x, y, z, maka kombinasi dua variabel dan komplemennya merupakan label baris sedangkan kombinasi 2 variabel lainnya berserta komplemennya merupakan label kolom peta Karnaugh, sebagai berikut:

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
wx				
wx'				
$w'x'$				
$w'x$				

Contoh 5.6.6

Sederhanakan bentuk normal disjungtif berikut ini:

$$wxy'z' + wx'y'z' + w'x'yz + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'x'y'z + w'xyz + w'xyz'.$$

Jawab:

Ekspresi di atas disajikan pada peta Karnaugh sebagai berikut:

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
wx			1	
wx'			1	
$w'x'$	1	1	1	1
$w'x$	1	1		

Dengan cara ini, diperoleh sebuah kotak 2 × 2 yang menghasilkan ekspresi $w'y$, sebuah kotak 1 × 4 yang menghasilkan $w'x'$, dan sebuah kotak 2 × 1 yang menghasilkan $wy'z'$. Jadi ekspresi yang dihasilkan adalah: $w'y + w'x' + wy'z'$.

□

Contoh 5.6.7

Sederhanakan bentuk normal disjungtif $wxyz' + wx'yz' + wx'y'z' + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'xyz'$.

<u>Jawab</u>:

Bentuk normal disjungtif $wxyz' + wx'yz' + wx'y'z' + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'xyz'$ disajikan pada peta Karnaugh sebagai berikut:

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
wx		1		
wx'		1	1	
$w'x'$		1	1	
$w'x$		1		

Dengan pengelompokan ini diperoleh 1 kotak 2 × 1 dan 1 kotak 2 × 2 yang menghasilkan ekspresi: $xyz' + x'z'$.

Pengelompokan lain adalah sebagai berikut:

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
wx		1		
wx'		1	1	
$w'x'$		1	1	

$w'x$		1		

Dengan pengelompokan ini diperoleh sebuah kotak 4×1 dan sebuah kotak 2×1 yang menghasilkan ekspresi: $yz' + x'y'z'$.

Pengelompokan lain lagi adalah sebagai berikut:

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
wx		1		
wx'		1	1	
$w'x'$		1	1	
$w'x$		1		

Dengan cara ini, diperoleh sebuah kotak 4×1 dan sebuah kotak 2×2 yang tumpang tindih. Ekspresi yang dihasilkan adalah: $yz' + x'z'$.

Dapat dilihat bahwa pengelompokan terakhir memberikan ekspresi yang lebih sederhana, yaitu hanya dengan 4 literal, sedangkan dua pengelompokan sebelumnya menghasilkan 5 literal.

□

5.7 Algoritma Quine-McCluskey

Definisi 5.7

1. **Kode Biner Desimal** (*Binary Code Decimal*, BCD) adalah representasi biner dari desimal.
2. Kode biner desimal dari sebuah ekspresi Boolean adalah penyajian ekspresi dalam biner di mana variabel disajikan dengan 1 dan komplemennya dengan 0.
3. Sebuah ekspresi Boolean E dinamakan **minimal** jika tidak ada ekspresi Boolean lain yang ekivalen yang lebih seherhana daripada E.
4. Algoritma **Quine–McCluskey** adalah metode untuk meminimalkan fungsi Boolean.

Algoritma Quine–McCluskey diperkenalkan oleh W.V. Quine and Edward J. McCluskey pada tahun 1956.

Algoritma 5.7

Peminimalan bentuk normal disjungtif dengan metode Quine-McCluskey.

Pre : Ekspresi bentuk normal disjungtif (dnf) E_1 dengan n variabel.

Post : Ekspresi Boolean E_2 yang minimal dan ekivalen dengan E_1.

1. Sajikan setiap minterm dari ekspresi dnf E_1 dalam bentuk kode biner desimal.
2. Kelompokkan kode biner desimal berdasarkan banyaknya digit 1 dalam kode.

3. Kombinasikan 2 minterm yang berbeda pada satu digit dan letakkan “-“ pada posisi digit itu; diperoleh perkalian n-1 literal, ditambah dengan tanda “-“, yang membentuk **implikan prima** (*prime implicant*) 2 minterm. Minterm yang tidak bisa dikombinasikan, ditandai dengan “*”.
4. Lakukan pengkombinasian seperti poin 3 untuk tingkat berikutnya sampai tidak ada minterm yang bisa dikombinasikan. Jika terdapat kombinasi yang sama, ambillah salah satu saja.
5. Buatkan tabel implikan prima dengan implikan prima yang ditandai deng “*” sebagai baris dan minterm sebagai kolom. Letakkan tanda “x” pada sel di mana minterm termasuk dalam implikan prima terkait.
6. Identifikasi kolom-kolom yang hanya terdiri dari satu “x” dan tandai dengan “√” implikan prima yang bersesuaian dengan sel-sel “x” tersebut.
7. Jika semua implikan prima telah tercakup dalam implikan prima dengan “√”, selesai. Jika belum, pilihlah himpunan terkecil S dari implikan prima yang belum ditandai “√” sehingga setiap kolom dengan “x” memiliki baris di S.

Contoh 5.7.1

Minimalkan:

$$f(w, x, y, z) = wxy'z' + wx'y'z' + w'x'yz + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'x'y'z + w'xyz + w'xyz'.$$

<u>Jawab</u>:

1. Sajikan setiap minterm dari ekspresi dalam bentuk kode biner desimal

Desimal	**w**	**x**	**y**	**z**	**Biner**	***f***
0	0	0	0	0	0000	1
1	0	0	0	1	0001	1
2	0	0	1	0	0010	1
3	0	0	1	1	0011	1
4	0	1	0	0	0100	0
5	0	1	0	1	0101	0
6	0	1	1	0	0110	1
7	0	1	1	1	0111	1
8	1	0	0	0	1000	1
9	1	0	0	1	1001	0
10	1	0	1	0	1010	0
11	1	0	1	1	1011	0
12	1	1	0	0	1100	1
13	1	1	0	1	1101	0
14	1	1	1	0	1110	0
15	1	1	1	1	1111	0

Jadi $f(w, x, y, z)$ $= wxy'z' + wx'y'z' + w'x'yz + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'x'y'z + w'xyz + w'xyz'$.

$= \Sigma(0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 12)$.

2. Kelompokkan kode biner desimal berdasarkan banyaknya digit 1 dalam kode.

Banyaknya 1	**Desimal**	**Biner**
0	0	0000
1	1	0001
	2	0010
	8	1000
2	3	0011
	6	0110
	12	1100
3	7	0111

3. Kombinasikan 2 minterm yang berbeda pada satu digit dan letakkan "-" pada posisi digit itu; diperoleh perkalian *n*-1 literal, ditambah dengan tanda "-", yang membentuk **implikan prima** (*prime implicant*) 2 minterm. Minterm yang tidak bisa dikombinasikan, ditandai dengan "*".

Desimal	**Biner**	**Implikan prima 2**	
		Desimal	**Biner**
0	0000	(0, 1)	000–
1	0001	(0, 2)	00–0
2	0010	(0, 8)	–000 *
8	1000	(1, 3)	00–1
3	0011	(2, 3)	001–
6	0110	(2, 6)	0–10
12	1100	(8, 12)	1–00 *

7	0111	(3, 7) (6, 7)	0–11 011–

4. Lakukan pengkombinasian seperti poin 3 untuk tingkat berikutnya sampai tidak ada minterm yang bisa dikombinasikan. Jika terdapat kombinasi yang sama, ambillah salah satu saja.

Desimal	**Biner**	**Implikan prima 2**		**Implikan prima 4**	
		Desimal	**Biner**	**Desimal**	**Biner**
0	0000	(0, 1) (0, 2) (0, 8) (1, 3) (2, 3) (2, 6) (8, 12) (3, 7) (6, 7)	000– 00–0 –000 * 00–1 001– 0–10 1–00 * 0–11 011–	(0, 1, 2, 3) (0, 2, 1, 3) (2, 3, 6, 7) (2, 6, 3, 7)	00 - - * 00 - - 0-1- * 0-1-
1 2 8	0001 0010 1000				
3 6 12	0011 0110 1100				
7	0111				

Terdapat kombinasi yang sama, yaitu (0, 1, 2, 3) sama dengan (0, 2, 1, 3) dan
(2, 3, 6, 7) sama dengan (2, 6, 3, 7). Sehingga masing-masing kombinasi yang sama, hanya diambil satu saja.

5. Buatkan tabel implikan prima dengan implikan prima yang ditandai deng “*” sebagai baris dan minterm sebagai kolom. Letakkan tanda “x” pada sel di mana minterm termasuk dalam implikan prima terkait.

   Pada langkah 4, diperoleh 4 kombinasi desimal dengan tanda “*”, yaitu (0, 8), (8, 12), (0, 1, 2, 3), dan (2, 3, 6, 7). Sehingga diperoleh tabel berikut:

Prima	**0**	**1**	**2**	**3**	**6**	**8**	**7**	**12**
(0, 8)	x					x		
(8, 12)						x		x
(0, 1, 2, 3)	x	x	x	x				
(2, 3, 6, 7)			x	x	x		x	

6. Identifikasi kolom-kolom yang hanya terdiri dari satu “x” dan tandai dengan “√” implikan prima yang bersesuaian dengan sel-sel “x” tersebut.
   Dapat dilihat pada tabel bahwa kolom minterm 12, 1, dan 6 hanya memiliki satu “*”, sehingga kombinasi desimal yang bersesuaian diberi tanda “√”, yaitu berturut-turut (8, 12), (0, 1, 2, 3), dan (2, 3, 6, 7).

Prima	**0**	**1**	**2**	**3**	**6**	**8**	**7**	**12**
(0, 8)	x					x		
(8, 12) √						x		x
(0, 1, 2, 3) √	x	x	x	x				
(2, 3, 6, 7) √			x	x	x		x	

7. Jika semua implikan prima telah tercakup dalam implikan prima dengan “√”, selesai. Jika belum, pilihlah himpunan terkecil *S*

dari implikan prima yang belum ditandai "√" sehingga setiap kolom dengan "x" memiliki baris di *S*.

Prima	**0**	**1**	**2**	**3**	**6**	**8**	**7**	**12**	**Biner**	***w***	***x***	***y***	***z***
(0, 8)	x					x							
(8, 12) √						x		x	1-00	1	-	0	0
(0, 1, 2, 3) √	x	x	x	x					00--	0	0	-	-
(2, 3, 6, 7) √			x	x	x		x		0-1-	0	-	1	-

Implikan prima (0, 8) tidak ditandai dengan tanda "√", namum dapat dilihat bahwa semua "x" dari implikan prima (0, 8) telah tercakup implikan prima (8, 12) dan (0, 1, 2, 3). Sehingga implikan yang diperlukan hanyalah (8, 12), (0, 1, 2, 3), dan (2, 3, 6, 7) yang merepresentasikan berturut-turut biner dan ekspresi sebagai berikut:

1-00 $w'y$
00- - $w'x'$
0-1- $wy'z'$

Jadi S ={(8, 12), (0, 1, 2, 3), (2, 3, 6, 7)}.
Sehingga hasil peminimalan adalah

$$f(w, x, y, z) = w'y + w'x' + wy'z'$$

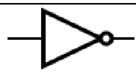
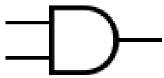
yang sesuai dengan yang diperoleh dengan peta Karnaugh pada Contoh 7.6.6.

□

5.8 Rangkaian Logika

Definisi 5.8

1. **Rangkaian logika** adalah rangkaian listrik yang mengimplementasikan fungsi Boolea dengan menggunakan gerbang logika.
2. **Gerbang logika dasar** adalah NOT, AND, dan OR yang disimbolkan sebagai berikut:

Nama Gerbang	**Simbol**	**Operasi Boolean**
NOT		$z = x'$
AND		$z = x \,.\, y$
OR		$z = x + y$

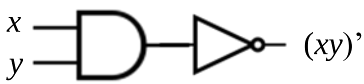
Contoh 5.8.1

Buatlah rangkaian logika untuk mengimplementasikan ekspresi berikut:

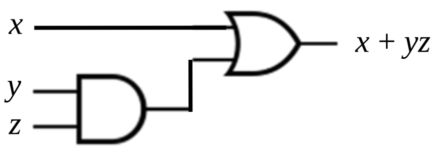
a) $(xy)'$
b) $x + yz$
c) $x(y + z)$
d) $(x + y)'\ z$
e) $x'y'z'$
f) $(x+ y+ z)'$

<u>Jawab</u>:

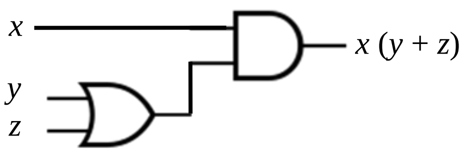
a) Rangkaian logika dari $x + yz$ adalah:



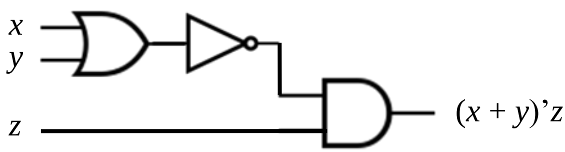
b) Rangkaian logika dari $x + yz$ adalah:



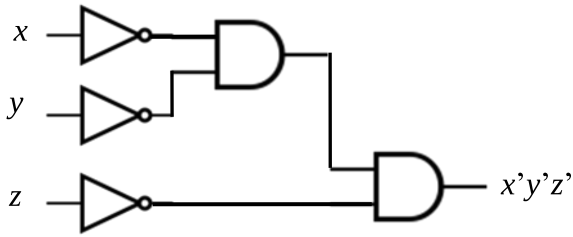
c) Rangkaian logika dari $x(y + z)$ adalah:



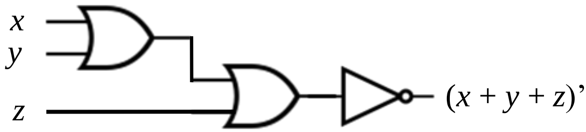
d) Rangkaian logika dari $(x + y)’z$ adalah:



e) Rangkaian logika dari *x*’*y*’*z*’ adalah:



f) Rangkaian logika dari (*x* + *y* + *z*)’ adalah::



Perhatikan bahwa ekspresi (*x* + *y* + *z*)’ ekivalen dengan *x*’*y*’*z*’ pada poin (c) di atas, yaitu dengan menggunakan hukum De Morgan. Namun rangkaian logika dari *x*’*y*’*z*’ memerlukan 5 gerbang, sedangkan rangkaian logika dari (*x* + *y* + *z*)’ memerlukan lebih sedikit gerbang, yaitu hanya memerlukan 3 gerbang.

□

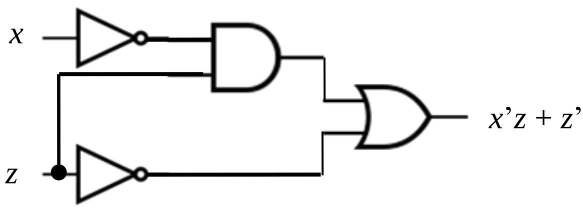
Contoh 5.8.2

Buatlah rangkaian logika untuk mengimplementasikan ekspresi berikut:

$$xyz' + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z' + x'y'z$$

<u>Jawab</u>:

Rangkaian untuk ekspresi $xyz' + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z' + x'y'z$ membutuhkan: 11 gerbang NOT, 12 gerbang AND, dan 5 gerbang OR. Namun pada Contoh 7.6.5, telah ditunjukkan bahwa $wxyz' + wx'yz' + wx'y'z' + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'xyz'$ ekivalen dengan $x'z + z'$ yang hanya membutuhkan 4 gerbang, sebagai berikut:



□

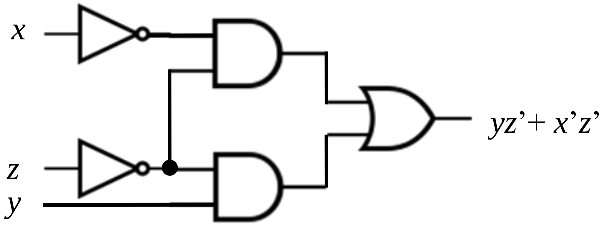
Contoh 5.8.3

Buatlah rangkaian logika untuk mengimplementasikan ekspresi berikut:

$$wxyz' + wx'yz' + wx'y'z' + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'xyz'$$

<u>Jawab</u>:

Rangkaian untuk ekspresi $wxyz' + wx'yz' + wx'y'z' + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'xyz'$ membutuhkan: 15 gerbang NOT, 18 gerbang AND, 5 gerbang OR. Namun pada Contoh 7.6.7, telah ditunjukkan bahwa $wxyz' + wx'yz' + wx'y'z' + w'x'yz' + w'x'y'z' + w'xyz'$ ekivalen dengan $yz' + x'z'$ yang hanya membutuhkan 5 gerbang, sebagai berikut:



□

5.9 Latihan Soal 5

5.1 Buktikan bahwa tupel 6 berikut ini adalah aljabar Boolean:

a. $(\{T, F\}, \vee, \wedge, \neg, F, T)$, pada Contoh 7.1.1.

b. $(\{S, \varnothing\}, \cup, \cap, {}^c, \varnothing, S)$, untuk himpunan tak kosong S, pada Contoh 7.1.2.

c. $(\mathscr{P}(S), \cup, \cap, {}^c, \varnothing, S)$, untuk himpunan tak kosong S, pada Contoh 7.1.3.

d. (S(120), kpk, fpb, 120/ , 1, 120),

5.2 Buktikan hukum-hukum berikut pada Teorema 7.1:

a. Involusi.

b. Komplemen Identitas.

c. De Morgan.

5.3 Tentukan nilai dari ekspresi Boolean berikut, jika nilai w, x, y, dan z berturut-turut adalah 1, 1, 0, dan 0:

a. $xy + x'y'$

b. $(wx'y + z')'$

c. $wyz' + w'yz' + z$

d. $wx + y'z + x'y$

e. $(w + x)'(yz)'$

f. $xy + y(x' + z)$

g. $(xy' + z)(wz' + w'y)$

h. $((x + wz)(y' + z))'$

7.2. Tentukan kombinasi-kombinasi nilai dari variabel w, x, y, z $\in \{0, 1\}$ yang memenuhi persamaan berikut:

a. $x'y = x'z$

b. $x + xy = 0$

c. $x(x + y) = 1$

d. $x'y + x'z' + wz = wz'$

7.3. Untuk variabel Boolean w, x, y, dan z, buktikan persamaan berikut dengan menggunakan Definisi 7.1 dan Teorema 7.1:

a. $xy + x'y = y$

b. $x + y = x = x + x'y$

c. $xyz + yz = yz$

e. $(wx)(yz) = (w(xy))z$

f. $x + y(x + z) = (x + y)(x + z)$

g. $xy + xz + wy + wz = (x + w)(y + z)$

d. $x + xy + y = (x + y)(y + 1)$ h. $((x + z)(y' + z))' = (x' + y) z'$

7.4. Buktikan atau berikan contoh kontra mana yang merupakan persamaan Boolean dari pernyataan berikut ini, untuk variabel Boolean x, y, z:

a. $x'y = x + y'$ d. $x(x + y) = x + xy$

b. $x(y + z) = xy + z$ e. $x + xy' = (x + y')y$

c. $x(y + xz) = xy + xz$ f. $xy + z = x(y + z)$

7.5. Buktikan, untuk variabel Boolean x, y, z:

a. $x + y = x \leftrightarrow x + y' = 1$ c. $x = y \leftrightarrow (x + y')(x' + y) = 1$

b. $xy = x + y \leftrightarrow x = y$ d. $xy = y \leftrightarrow xy' = 0$

7.6. Tentukan dual dari ekspresi Boolean berikut untuk variabel Boolean w, x, y, dan z:

a. $xy' + 1$ d. $(wx + yz)z$

b. $wxy + xy'z + wy'$ e. $x + y(x + z)$

c. $(x + y)(y + z)(w + z)$ f. $(xy + xz)'(wy + 0)'$

7.7. Tentukan nilai $f : B^3 \rightarrow B$ dengan $B = \{0, 1\}$, dimana $f(x, y, z) = xz' + yz$.

7.8. Misalkan f, $g : B^3 \rightarrow B$ dengan $B = \{0, 1\}$, dimana $f(x, y, z) = wy' + xz$ dan $g(x, y, z) = xyz'$. Tentukan

a. $(fg)(x, y, z)$ c. $f\,'(x, y, z)$

b. $(f + g)(x, y, z)$ d. $g\,'(x, y, z)$

7.9. Misalkan $S = \{w, x, y, z\}$. Tentukan mana di antara ekspresi berikut yang adalah minterm atau maxterm pada S atau bukan keduanya:

a. xyz e. $w + x + z$

b. $wx'yz$ f. $x' + y + x + z$

c. $wx'wy'z$ g. $wx + y + z$

d. $w'x'y'z'$ h. $x' + y + x' + z'$

7.10. Misalkan $S = \{w, x, y, z\}$. Tentukan mana di antara ekspresi berikut yang adalah bentuk normal disjungtif pada S:

a. $wxyz + wx'yz + w'x'y'z'$

b. $wx'yz + xyz' + w'xyz'$

c. $w'xyz + wx'yz + wx'z'$

d. $wx'y'z + wx'yz' + wx'y'z$

7.11. Misalkan $S = \{w, x, y, z\}$. Tentukan mana di antara ekspresi berikut yang adalah bentuk normal konjungtif pada S:

a. $(w' + x + y' + z)(w + x + y' + z)(w + x + y + z')$

b. $(w + x' + y + z)(w + x + z)(w + x' + y + z)$

c. $(w + x + y' + z)(w + x + y' + y)(w + x + y + z')$

d. $(w + x' + y' + z')(w' + x + y + z)(w' + x' + y' + z')$

7.12. Misalkan $S = \{x, y, z\}$. Konversikan ekspresi Boolean berikut ke dalam bentuk normal disjungtif pada S dengan menggunakan tabel kebenaran:

a. $xy'z(x + x'z)$

b. $(x + y')(x + x'z)$

c. $(x' + y')(xy + x'z)$

d. $(xy' + z)(y + x'z)$

e. $(x' + y + z)(x + y' + z')$

f. $(xy'z)'(xy' + z)'$

7.13. Misalkan $S = \{w, x, y, z\}$. Konversikan ekspresi Boolean pada soal 7.14 ke dalam bentuk normal disjungtif pada S dengan menggunakan Algoritma 7.5.

7.14. Sederhanakan bentuk normal disjungtif berikut dengan menggunakan peta Karnaugh:

a. $xy + x'y$

b. $x'y + x'y' + xy'$

c. $xyz + x'yz' + xyz' + x'y'z$

d. $xy'z + xy'z' + x'yz + x'y'z'$

e. $xyz + xyz' + xy'z' + x'y'z + x'y'z'$

f. $xyz + xy'z + xy'z' + x'yz + x'y'z'$

g. $xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z'$

h. $xyz' + xy'z + xy'z' + x'yz + x'y'z$

i. $wxyz + wxy'z + wxyz' + w'xyz + w'x'yz + w'xyz'$

j. $wxy'z' + wx'yz' + wx'y'z' + w'xyz + w'x'yz + w'xyz' + w'xy'z$

k. $w'xyz + w'xy'z + w'x'yz + w'x'y'z + w'xyz' + w'xy'z' + w'x'yz' + w'x'y'z'$

l. $wxyz + wx'y'z + wxyz' + wx'y'z' + w'xyz + w'xy'z + w'xy'z' + w'x'y'z'$

m. $wxy'z + wxyz' + wx'yz' + wx'y'z' + w'xyz' + w'xy'z'$

7.15. Minimalkan bentuk normal disjungtif pada Soal 7.16 dengan menggunakan metode Quine-McCluskey.

7.16. Tuliskan bentuk normal disjungtif dari tabel-tabel berikut dan sederhanakan.

a.

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
wx			1	1
wx'	1	1	1	1
$w'x'$		1	1	1
$w'x$			1	

b.

	yz	yz'	$y'z'$	$y'z$
wx		1		
wx'	1	1	1	
$w'x'$		1	1	1
$w'x$			1	

c.

	yz	*yz'*	*y'z'*	*y'z*
wx		1		
wx'	1	1	1	1
w'x'	1			1
w'x	1			1

d.

	yz	*yz'*	*y'z'*	*y'z*
wx			1	
wx'	1	1	1	
w'x'	1	1	1	1
w'x			1	

7.17. Implementasikan ekspresi-ekspresi Boolean berikut ke dalam rangkaian logika:

a. $xy + x'y$

b. xyz'

c. $x' + y + z$

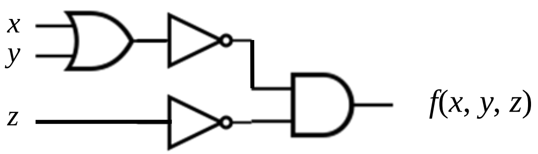
d. $xy' + z + x'z$

e. $(x' + y + z)(x + y' + z')$

f. $(xy)'\ (x + z)'$

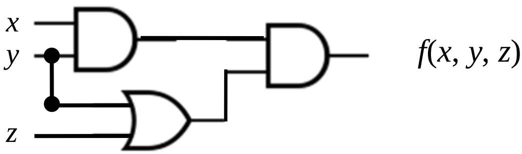
7.18. Carilah fungsi Boolean $f(x, y, z)$ dari rangkaian logika berikut ini:

a.



b.

c.



DAFTAR PUSTAKA

Anderson, J. A. *Discrete Mathematics with Combinatorics*. Prentice Hall, New Jersey, 2001.

Ben-Ari, M. *Mathematical Logic for Computer Science*. Prentice Hall, Hemel Hemstead, 1993.

Burris, S. N. *Logic for Mathematics and Computer Science*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.

Bush, J. R. *Discrete Mathematics Workbook*. Prentice Hall, New Jersey, 2003.

Cori, R. dan Lascar, D. *Mathematical Logic*. Oxford, 2000.

Ebbinghaus, H.D, Flum, J, dan Thomas W. *Mathematical Logic*. Second Edition. Springer, New York, 1994.

Enderton, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, New York, 1972.

Enderton, H. B. *Elements of Set Theory*. Academic Press, New York, 1977.

Gossett, Eric. *Discrete Mathematics with Proof.* Prentice Hall, New Jersey, 2003.

Grimaldi, R. P. *Discrete and Combinatorial Mathematics*. Addison Wesley, New York, 3rd edition, 1994.

Harris , J. W. dan Stocker, H. *Handbook of Mathematics and Computational Science*. Springer-Verlag, New York, 2006.

Jech, T. *Set Theory*. Springer, Berlin, 2000.

Johnson, D.L. *Elements of Logic via Numbers and Sets*. Springer, London, 1998.

Kerami, Dj. dan Iswati, E. *Glosarium Matematika*, Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa, Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, 1993.

Nederpelt, R.P., *De Taal van de Wiskunde*, Versluys, Almere, 1987.

Rosen, K.H., *Discrete Mathematics and its Applications*, 6th edition, McGraw-Hill, New York, 2007.

Teller, P. *A Modern Formal Logic Primer*. *Sentence Logic. Vol. 1*. Prentice Hall, New Jersey, 1989.

Teller, P. *A Modern Formal Logic Primer*. *Predicate Logic & Metatheory. Vol. 2*. Prentice Hall, New Jersey, 1989.