

Bidang Fokus/Unggulan : Teknologi Informasi
Fakultas : MIPA

LAPORAN AKHIR
RISRET DASAR UNGGULAN UNSRAT (RDUU)



GRAF PERPOTONGAN KRITIS DENGAN DERAJAT BESAR

TIM PENGUSUL

Ketua Peneliti

Prof. Dr. Benny Pinontoan, M.Sc - 0004066603

Anggota Peneliti

Jullia Titaley, M.Si - 0018077204

Drs. Jantje D. Prang, M.Si – 0020125801

UNIVERSITAS SAM RATULANGI
OKTOBER 2019

Dibiayai oleh:

Daftar Isian Pelaksanaan Anggaran (DIPA) Universitas Sam Ratulangi.
Kementerian Riset, Teknologi dan pendidikan Tinggi
Nomor SP DIPA-042.01.2.400959/2019, tanggal 05 Desember 2018



**KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI DAN PENDIDIKAN TINGGI
UNIVERSITAS SAM RATULANGI**

LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT

Alamat : Kampus UNSRAT Manado

Telp : (0431) 827560, Fax. (0431) 827560

Email : lppm@unsrat.ac.id Laman : http://lppm.unsrat.ac.id

**HALAMAN PENGESAHAN LAPORAN AKHIR
RDUU**

Judul Kegiatan Graf Perpotongan Kritis dengan Derajat Besar

Ketua Peneliti

Nama Lengkap : BENNY PINONTOAN

Perguruan Tinggi : Universitas Sam Ratulangi

NIP/NIK : 196606041995121001

NIDN : 0004066603

Jab. Fungsional : Profesor

Unit Kerja : Matematika

Nomor HP :

Alamat Email : bpinonto@unsrat.ac.id

Usulan Biaya : 40.000.000

Biaya Maksimum : 39.000.000

Lama Penelitian : 6 bulan

Anggota Peneliti (1)

Nama Lengkap : JULLIA TITALEY

NIP : 197207182000032001

NIDN : 0018077204

Perguruan Tinggi : Universitas Sam Ratulangi

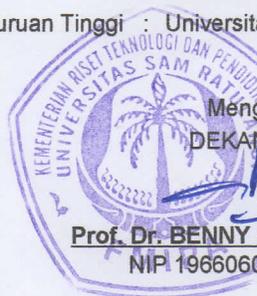
Anggota Peneliti (1)

Nama Lengkap : JANTJE DENNY PRANG

NIP : 195812201986021001

NIDN : 0020125805

Perguruan Tinggi : Universitas Sam Ratulangi



Mengetahui
DEKAN FMIPA

Prof. Dr. BENNY PINONTOAN, M.Sc
NIP. 196606041995121001

Manado, 17 Oktober 2019

Ketua Peneliti

BENNY PINONTOAN
NIP 196606041995121001

Menyetujui

Ketua LPPM Universitas Sam Ratulangi

Prof. Dr. Ir. CHARLES L. KAUNANG, MS
NIP 195910181986031002

RINGKASAN

Sebuah graf (V, E) dimana $V \neq \emptyset$ adalah himpunan objek yang dinamakan simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan simpul-simpul. Sebuah sisi memiliki dua ujung. Sisi yang memiliki ujung yang sama disebut loop. Derajat simpul v dari sebuah graf adalah banyaknya sisi yang berhubungan dengan v ; sisi loop dihitung dua kali. Dua sisi berbeda yang memiliki ujung yang sama disebut sisi damping. Pada penelitian ini, akan ditentukan mekanisma *wedges* yang analog dengan teorema ubin.

PRAKATA

Puji syukur kami panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Kuasa atas berkat dan rahmatNya sehingga seluruh rangkaian kegiatan Penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik dan tepat waktu.

Kegiatan Riset Dasar Unggulan Universitas Sam Ratulangi (RDUU) dapat dilaksanakan berkat adanya bantuan dan kerjasama yang sangat baik dari semua pihak yang terlibat. Pada kesempatan ini kami mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada :

1. Universitas Sam Ratulangi yang telah memberikan dana untuk pelaksanaan kegiatan penelitian ini
2. Ketua LPPM Unsrat yang telah memberikan persetujuan untuk melaksanakan kegiatan penelitian ini
3. Tenaga perpustakaan Universitas Negeri Malang dan Istitut Teknologi Surabaya yang telah membantu memberikan kesempatan kepada kami saat studi literatur
4. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan namanya satu persatu, yang telah membantu terlaksananya penelitian ini.

Kami menyadari bahwa apa yang telah kami lakukan dan hasilkan selama melaksanakan kegiatan penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kami mengharapkan saran dan kritik yang konstruktif dari semua pihak demi penyempurnaan laporan akhir penelitian ini.

Manado, September 2019

Tim Peneliti

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PENGESAHAN	i
RINGKASAN	ii
PRAKATA	iii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR TABEL	v
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR LAMPIRAN	vii
BAB 1. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Target Capaian	2
BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA	3
BAB 3. TUJUAN DAN MANFAAT	
3.1 Tujuan	7
3.2 Manfaat	7
BAB 4. METODE PENELITIAN	
4.1 Langkah-langkah Penelitian	7
4.2 Alat dan Bahan	7
4.3 Waktu dan Tempat	7
BAB 5. HASIL DAN LUARAN	
5.1 Famili tak-hingga Graf $P(m,n)$	8
5.2 Energi $\varepsilon(P(m, 2))$ untuk $m \geq 1$	9
5.3 Penbenaman Buku H_n dan M_n	15
BAB 6 KESIMPULAN DAN SARAN	18
DAFTAR PUSTAKA	19
LAMPIRAN	20

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 1. Rencana Target Capaian	2

DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 1. Graf dengan Angka Perpotongan 12 dengan derajat maksimum	5
Gambar 2. Ubin S dan T beserta twist S' dan T'	8
Gambar 3. Graf $P(2, 4)$ dengan S' dan twist T'	9
Gambar 4. $P(1, 2)$ dan $P(2, 2)$	10
Gambar 5. Graf $P(3, 2)$	12
Gambar 6. Sebuah pembenaman H_5	16
Gambar 7. Sebuah pembenaman buku M_3	17

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Surat Tugas	21

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sebuah graf (V, E) dimana $V \neq \emptyset$ adalah himpunan objek yang dinamakan simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan simpul-simpul. Sebuah sisi memiliki dua ujung. Sisi yang memiliki ujung yang sama disebut loop. Derajat simpul v dari sebuah graf adalah banyaknya sisi yang berhubungan dengan v ; sisi loop dihitung dua kali. Dua sisi berbeda yang memiliki ujung yang sama disebut sisi damping.

Pada bidang datar, maka graf dapat digambar dengan simpul disajikan dalam bentuk titik dan sisi disajikan dalam bentuk garis yang menghubungkan titik-titik yang menjadi ujung-ujungnya, dengan ketentuan bahwa tidak ada sisi yang memotong dirinya sendiri, dua sisi damping tidak boleh saling memotong, dua sisi sembarang tidak boleh saling memotong lebih dari satu kali, dan paling banyak dua sisi berpotongan pada satu titik. Banyaknya perpotongan sisi pada sebuah gambar pada bidang datar disebut jumlah perpotongan. *Angka perpotongan* $cr(G)$ dari graf G adalah jumlah perpotongan terkecil diantara semua gambar G pada bidang datar. Sebuah graf adalah planar jika angka perpotongannya adalah nol, dan nonplanar jika angka perpotongan lebih dari nol. Gambar sebuah graf tanpa perpotongan disebut graf bidang.

Perhatian terhadap masalah angka perpotongan menjadi makin besar setelah Leighton (1983) mengindikasikan penerapannya pada layout sirkuit *Very Large Scale of Integration (VLSI)* seperti microprocessor. Dalam hal rangkaian elektronik seperti halnya VLSI, yang menjadi pertimbangan adalah meminimalkan perpotongan, karena perpotongan dapat mengakibatkan hubungan pendek (*short circuit*).

Bokal, Dvorak, Hlineny, Leanos, Mohar, dan Wiedera (2019) menentukan batas derajat untuk perpotongan kritis k , dengan $k \leq 12$. Mereka menggunakan mekanisme irisan (*wedges*).

Pinontoan dan Richter (2003) menentukan angka perpotongan sebuah famili tak hingga graf reguler 5 dengan mengidentifikasi graf-graf ini sebagai susunan ubin-ubin. Graf yang disusun oleh ubin-ubin seperti ini disebut oleh Mohar dan Dvořák (2015) graf *periodic*.

Pada penelitian ini, akan ditentukan mekanisma *wedges* yang analog dengan teorema ubin.

1.2 Perumusan Masalah

Diberikan bilangan bulat k dapatkan graf perpotongan kritis k dengan $k \leq 12$, dengan derajat maksimum.

1.3 Target Capaian

Target capaian penelitian ini dapat di lihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Rencana Target Capaian

No	Luaran	Target dicapai pada bulan "November 2019"
1	Publikasi Ilmiah di Internasional bereputasi	Accepted
2	Pemakalah dalam Temu Ilmiah Internasional	Terdaftar

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

Sebuah graf adalah pasangan berurutan (V, E) dimana $V \neq \emptyset$ adalah himpunan objek yang dinamakan simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan simpul-simpul. Setiap sisi $e = uv = vu$ memiliki ujung simpul u dan ujung simpul v , dan kedua simpul itu dinamakan saling damping. Tetangga dari v adalah semua simpul yang saling damping dengan v . Dua sisi yang memiliki simpul bersama dalam sebuah graf dinamakan sisi damping. Sebuah sisi $e = vv$ disebut gelang. Derajat sebuah simpul v adalah banyaknya sisi yang berujung pada v ; sisi gelang dihitung dua kali. Jika $e_1 = uv$ dan $e_2 = uv$ maka, e_1 dan e_2 adalah sisi paralel. Graf dinamakan sederhana jika tanpa gelang dan sisi paralel. Lintasan yang menghubungkan dua simpul u dan v dalam sebuah graf G adalah barisan sisi yang menghubungkan u dan v . Jika untuk setiap pasangan simpul di graf G terdapat lintasan yang menghubungkan keduanya, maka G disebut graf terkoneksi. Jika untuk setiap pasangan simpul terdapat k lintasan yang disjoint, maka G disebut graf terkoneksi- k . Sebuah graf dikatakan reguler n jika setiap simpul memiliki derajat n .

Sebuah graf G dapat digambar pada bidang dimana simpul dari G direpresentasikan oleh titik dan sebuah sisi disajikan dalam bentuk kurva atau garis lurus yang menghubungkan titik-titik simpul itu pada bidang. Sebuah graf bisa memiliki beberapa gambar. Gambar yang baik dari sebuah graf memiliki sifat-sifat, yaitu: tidak ada sisi yang memotong dirinya sendiri, dua sisi damping tidak boleh saling memotong, dua sisi tidak boleh saling memotong lebih dari sekali, dan paling banyak dua sisi berpotongan pada satu titik. Dalam sebuah gambar yang baik dari sebuah graf, dua sisi bisa berpotongan atau tidak. Dua sisi pada sebuah gambar sebuah graf bisa berpotongan pada sebuah gambar, tapi bisa tidak berpotongan pada gambar yang lain. Banyaknya perpotongan sisi pada suatu gambar bisa berbeda dengan banyaknya perpotongan pada gambar yang lain dari graf yang sama.

Angka perpotongan $cr(G)$ dari sebuah graf adalah jumlah perpotongan terkecil diantara semua gambar baik dari graf G . Sebuah graf G adalah planar jika

$cr(G) = 0$, selain itu disebut nonplanar. Jadi, angka perpotongan sebuah graf adalah unik. Sebuah graf G dinamakan *perpotongan kritis k* , jika $cr(G) = k$ dan untuk setiap sisi $e \in G$, $cr(G - e) < k$. Terminologi tentang angka perpotongan pada paper ini sama dengan terminologi dari Schaefer (2018).

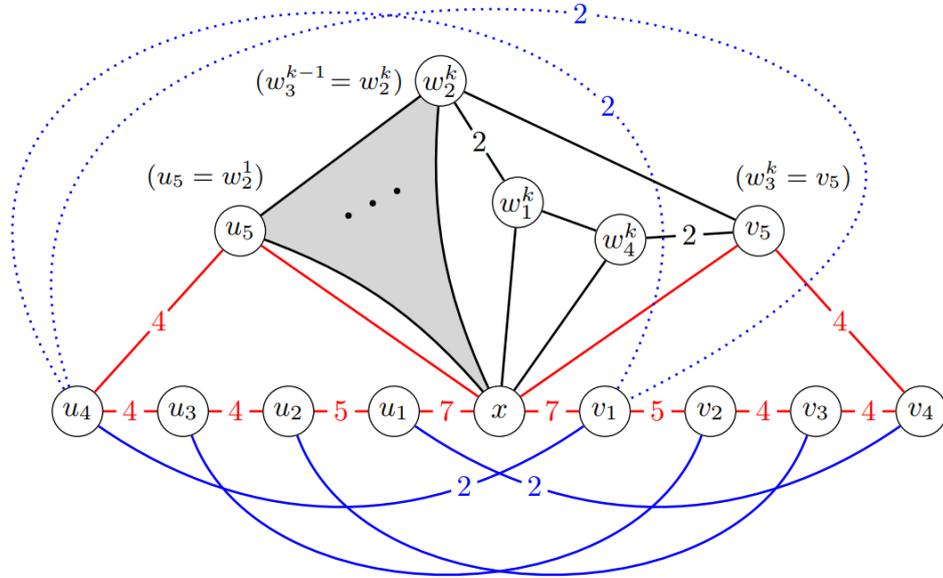
Garey dan Johnson (1983) menetapkan bahwa masalah angka perpotongan merupakan masalah NP-complete. Dengan kata lain, menentukan angka perpotongan sebuah graf tidaklah mudah. Biasanya, untuk membuktikan bahwa $cr(G) = k$ dilakukan dengan membuktikan bahwa $cr(G) \geq k$ dan $cr(G) \leq k$. Pembuktian $cr(G) \leq k$ biasanya dilakukan melalui gambar pada bidang, sedangkan untuk membuktikan bahwa $cr(G) \geq k$, dilakukan dengan menunjukkan bahwa memang terdapat k pasang sisi yang harus berpotongan.

Pinontoan dan Richter (2003) memperkenalkan konsep ubin, yaitu graf dengan beberapa ketentuan. Beberapa graf dapat disusun dari ubin-ubin ini. Sebuah ubin $T = (G, L, R)$ adalah graf G dengan dua barisan simpul yang disebut dinding kiri L dan dinding kanan R . *Angka perpotongan ubin*, $tcr(T)$, adalah minimum jumlah perpotongan di antara semua gambar graf G pada persegi $[0, 1] \times [0, 1]$ pada bidang sedemikian rupa sehingga simpul-simpul dari L berada pada $\{0\} \times [0, 1]$ dengan urutan menyusut pada koordinat y dan simpul-simpul dari R berada pada $\{1\} \times [0, 1]$ dengan urutan menyusut pada koordinat y . Sebuah ubin bisa dibalik secara vertikal maupun secara horisontal, dan dapat juga dipilin. Dua ubin dikatakan kompatibel jika dinding-dindingnya bersesuaian. Dua ubin yang kompatibel dapat dilekatkan dan menjadi ubin yang lebih besar.

Dvořák dan Mohar (2015) menamakan graf *periodik* adalah yang dibangun dengan merekatkan graf-graf kecil yang sama. Ini didasarkan pada konstruksi ubin yang diperkenalkan oleh Pinontoan dan Richter (2003). Mohar dan Dvořák menyimpulkan bahwa angka perpotongan graf periodik dapat dihitung (*computable*).

Bokal, Dvorak, Hlineny, Leanos, Mohar, dan Wiedera (2019) melakukan konstruksi graf perpotongan kritis k dan menyatakan bahwa terdapat konstant d sehingga setiap graf perpotongan kritis k , dengan $k \leq 12$, memiliki derajat maksimum d . Salah satu contoh yang disajikan adalah graf pada Gambar 1.

Mereka menduga bahwa konstruksi graf seperti ini dapat dilakukan analog seperti ubin yang dilakukan oleh Pinontoan dan Richter (2003).



Gambar 1. Graf dengan angka perpotongan 12 dengan derajat maksimum.

BAB 3

TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

3.1 Tujuan

Diberikan famili tak hingga graf reguler 4 B_n diperkenalkan oleh Richter dan Thomassen (1993) dan famili tak hingga graf reguler 5 M_n yang diperkenalkan Pinontoan dan Richter (2003). Maka dalam penelitian ini bertujuan menentukan ketebalan buku dan berapa angka perpotongan buku k -halaman untuk $k = 2, 3, 4$ untuk pembedaan buku dari B_n dan M_n ,

3.2 Manfaat

Dengan ditentukannya ketebalan buku pembedaan dari B_n dan M_n , maka telah dipastikan bahwa untuk family tak hingga graf reguler 4 dan 5 hanya membutuhkan sekian halaman untuk pembedaannya.

Pembedaan buku ini memiliki penerapan pada perancangan layout *Very Large Scale Integrated* (VLSI) seperti microprocessor.

BAB 4. METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan melalui langkah-langkah berikut:

1. Studi literatur yang berkaitan dengan masalah angka perpotongan dan ubin.
2. Merancang gambar graf perpotongan kritis k , dengan $k \leq 12$.
3. Menentukan derajat maksimum.
4. Melakukan verifikasi, jika diperlukan, simulasi komputer.
 - a. Menetapkan spesifikasi fungsional.
 - b. Pemrograman menggunakan Kompiler Delphi.
 - c. Menetapkan beberapa input graf.
 - d. Testing beberapa input graf.
 - e. Iterasi sampai tercapai kesesuaian dengan verifikasi deduksi.

Alat dan Bahan

1. Komputer
2. Kompiler Delphi.

Waktu dan Tempat

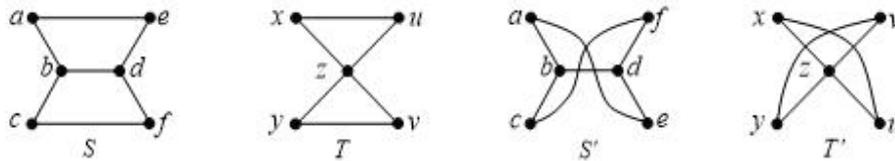
1. Waktu pelaksanaan adalah tahun 2019.
2. Tempat pelaksanaan di Institut Teknologi Bandung atau Universitas Udayana untuk studi literatur dan sisanya di Manado.

BAB 5
HASIL DAN LUARAN YANG DICAPAI

Dalam Bab ini, akan tentukan didefinisikan kembali graf tak hingga $P(m, n)$ yang terdiri dari m ubin S dan n ubin T beserta twist T , kemudian akan ditentukan energi $\varepsilon(P(m, 2))$ untuk $m \geq 1$ dan $\varepsilon(P(2, n))$ untuk $n \geq 1$.

5.1 Famili tak-hingga Graf $P(m, n)$.

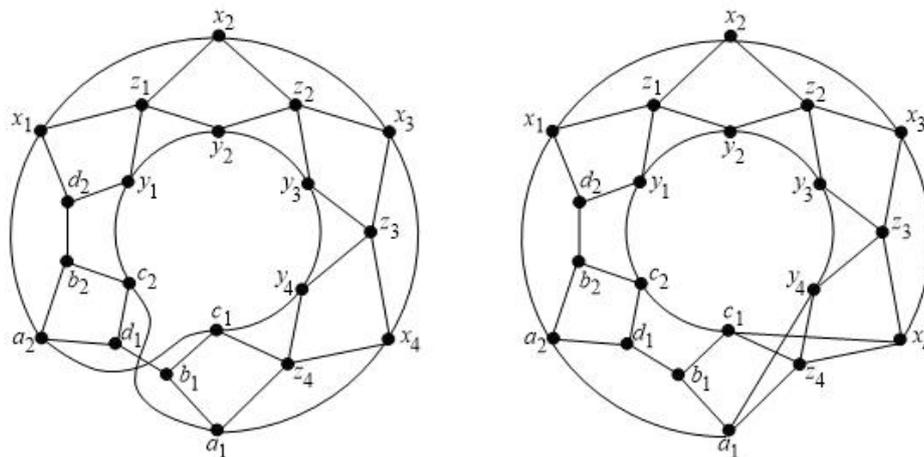
Perhatikan ubin S dan T , masing-masing dengan *twist* S' dan T' pada Gambar 5.1 berikut:



Gambar 2. Ubin S dan T beserta twist S' dan T' .

Pinontoan dan Richter (2003) mendefinisikan famili tak-hingga graf $\binom{2h+3}{2}$ -perpotongan-kritis, dengan h bilangan bulat positif. Jika diambil $h = 0$, dan untuk $1 \leq m, n$ serta $3 \leq m + n$, maka diperoleh famili graf tak-hingga $P(m, n) = \otimes(S^m T^n)$ dimana S dan T adalah ubin pada Gambar 5.1 dengan twist bisa S' pada S atau T' pada T . Tepatnya, untuk $1 \leq m, n$ dan $3 \leq m + n$, graf $P(m, n)$ memiliki simpul-simpul $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_m, b_m, c_m, d_m, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$, serta sisi-sisi $a_k b_k, b_k c_k, b_k d_k$ ($1 \leq k \leq m$), $a_k a_{k+1}, c_k c_{k+1}, d_k a_{k+1}, d_k c_{k+1}$ (untuk $1 \leq k \leq m - 1$), $x_k z_k, y_k z_k$ ($1 \leq k \leq n$), $x_k x_{k+1}, y_k y_{k+1}, z_k x_{k+1}, z_k y_{k+1}$ ($1 \leq k \leq n - 1$), $d_m x_1, d_m y_1, x_n c_1$, dan $y_n a_1$.

Gambar 5.2 menunjukkan $P(2, 4)$ berturut-turut dengan twist S' dari T dan twist T' dari T .



Gambar 3. Graf $P(2, 4)$ dengan S' dan twist T' .

5.2 Energi $\varepsilon(P(m, 2))$ untuk $m \geq 1$.

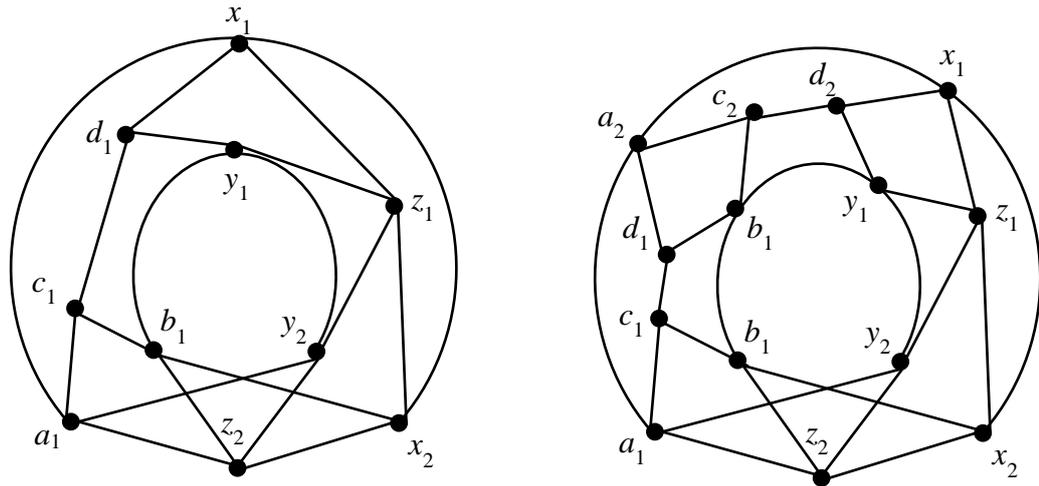
Biarkan G graf sederhana dengan n simpul v_1, v_2, \dots, v_n dan biarkan d_i adalag derajat dari simpul v_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Definisikan (Balakrishnan, 2004)

$$d_{ij} = \begin{cases} \max(d_i, d_j), & \text{jika } v_i \text{ dan } v_j \text{ terhubung} \\ 0, & \text{jika lain.} \end{cases}$$

Maka matrix $M(G)=[d_{ij}]$ berukuran $n \times n$ disebut *matrix derajat maximum* dari graf G .

Energy derajat maximum $\varepsilon(G)$ dari graf sederhana G adalah jumlah nilai mutlak eigen dari matrix derajat maximum G (Adiga dan Smitha, 2009). Sedangkan rata-rata energi derajat maximum graf G adalah energi dibagi banyaknya simpul atau banyaknya nilai eigen.

Gambar 4 menunjukkan $P(1, 2)$ dan $P(2, 2)$.



Gambar 4. $P(1, 2)$ dan $P(2, 2)$.

Matrix derajat maximum dari $P(1, 2)$ adalah:

$$\begin{matrix}
 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_2 & y_2 & z_2 \\
 a_1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\
 b_1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\
 c_1 & 4 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 d_1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 x_1 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\
 y_1 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\
 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\
 x_2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\
 y_2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 \\
 z_2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0
 \end{matrix}$$

Nilai eigen nya adalah

$$\lambda_1 = -10.9486, \quad \lambda_2 = -8.0000, \quad \lambda_3 = -8.0000, \quad \lambda_4 = -4.9591, \quad \lambda_5 = -1.5846,$$

$$\lambda_6 = 4.0000, \quad \lambda_7 = 4.0000, \quad \lambda_8 = 4.6306, \quad \lambda_9 = 5.5333, \quad \lambda_{10} = 15.3286$$

Sehingga energi dari $\varepsilon(P(1, 2))$ adalah jumlah dari bilangan mutlak dari eigenvalue, yaitu

$$\varepsilon(P(1, 2)) = \sum_{k=1}^{10} |\lambda_k| = 66,9848.$$

Dan rata-rata energi adalah $66,9848/10 = 6,698$.

Matrix derajat maximum dari $P(2, 2)$ adalah:

$$\begin{array}{c}
 a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad d_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad d_2 \quad x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2 \\
 \left(\begin{array}{cccccccccccccc}
 a_1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\
 b_1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\
 c_1 & 4 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 d_1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_2 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\
 y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\
 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\
 x_2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\
 y_2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 \\
 z_2 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Nilai Eigen nya adalah

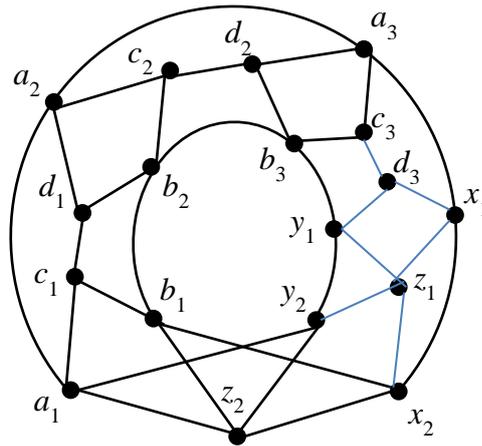
$$\lambda_1 = -12.3244, \quad \lambda_2 = -8.2955, \quad \lambda_3 = -8.0000, \quad \lambda_4 = -5.6569, \quad \lambda_5 = -5.6569,$$

$$\lambda_6 = -4.0978, \quad \lambda_7 = -2.0458, \quad \lambda_8 = 1.0057, \quad \lambda_9 = 2.0458, \quad \lambda_{10} = 5.6569,$$

$$\lambda_{11} = 5.6569, \quad \lambda_{12} = 8.2955, \quad \lambda_{13} = 8.3808, \quad \lambda_{14} = 15.0356.$$

Sehingga energi derajat maximum dari $\varepsilon(P(2, 2))$ dari graf $P(2, 2)$ adalah jumlah dari bilangan mutlak dari eigenvalue, yaitu $\varepsilon(P(2, 2)) = \sum_{k=1}^{14} |\lambda_k| = 92,1545$ dan rata-rata energi derajat maximum adalah $92,1545/14 = 6,582$.

Graf $P(3, 2)$ adalah:



Matrix derajat maximum dari graf $P(3, 2)$ adalah:

	a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2
a_1	0	0	4	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4
b_1	0	0	4	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	4
c_1	4	4	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_1	0	0	3	0	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_2	4	0	0	4	0	0	4	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b_2	0	4	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0
c_2	0	0	0	0	4	4	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_2	0	0	0	0	0	0	3	0	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	4	0	0	0	0	0
b_3	0	0	0	0	0	4	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	0	0
c_3	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0	3	0	0	0	0	0	0
d_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	4	4	0	0	0	0
x_1	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	4	0	0	4	4	0	0
y_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	4	0	0	4	0	4	0
z_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0	4	4	0
x_2	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	4	0	0	4
y_2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0	0	4
z_2	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	4	0

Dengan nilai eigen ber turut-turut				
-12,7544	-10,1022	-8,0000	-8,0000	
-6,7925	-3,7354			
-2,4721	-2,4721	-2,2751	-0,0903	
0,7064	3,6400			
4,1522	6,4721	6,4721	9,9634	
	10,4085	14,8794		

Sehingga energi derajat maximum dari $\varepsilon(P(3, 2))$ dari graf $P(3, 2)$ adalah jumlah dari bilangan mutlak dari eigenvalue, yaitu $\varepsilon(P(3, 2)) = \sum_{k=1}^{18} |\lambda_k| = 113,3882$ dan rata-rata energi derajat maximum adalah 6,299.

Sekarang kita akan menyelidiki rata-rata energi derajat maximum $\varepsilon(P(m, 2))$ jika $m \rightarrow \infty$.

Teorema

$P(m, 2)$ adalah perpotongan kritis dengan rata-rata energi derajat maximum 6, jika $m \rightarrow \infty$.

Bukti

Bahwa $P(m, 2)$ adalah perpotongan kritis, dapat dilihat bahwa penghilangan salah satu sisi sembarang menurunkan angka perpotongan.

Determinan dari $(\lambda I - P(m, 2))$ adalah

$$|\lambda I - P(m, 2)| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 4 & 0 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 0 & \lambda & 4 & & & \dots & 0 & 4 \\ 4 & 4 & \lambda & 3 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \lambda & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & \lambda & \dots & 4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & \lambda & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 6(m-1)^{m-1}) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 4 & 0 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 0 & \lambda & 4 & & & \dots & 0 & 4 \\ 4 & 4 & \lambda & 3 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \lambda & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & \lambda & \dots & 4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & \lambda & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 6(m-1)^{m-1} + 3) (\lambda - (m-1)^2)$$

Sehingga energi menjadi

$$6(m+3)$$

Dan jika n ke tak hingga, maka

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 6(m+3)/m = 6.$$

5.3 Pembenanaman Buku H_n dan M_n

Kita akan membuktikan bahwa $\rho(H_n) = 3$ dan $\rho(M_n) = 3$, untuk $n \geq 3$.

Teorema 1. Biarkan $n \geq 3$. Maka $\rho(H_n) = 3$.

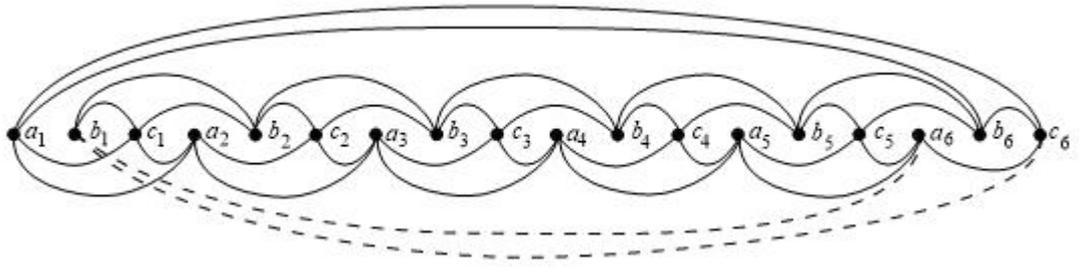
Bukti. Richter dan Thomassen [7] menetapkan angka perpotongan H_n ($n \geq 3$) adalah 3, yang juga dikonfirmasi oleh Pinontoan dan Richter [6] dengan menggunakan mekanisme ubin. Jadi M_n tidak planar pada bidang (two pages), dan membutuhkan lebih dari dua halaman untuk pembenanaman buku. Dengan kata lain, $\rho(H_n) \geq 3$.

Akan ditunjukkan bahwa $\rho(H_n) \leq 3$ dengan menggambar pembenanaman H_n pada buku. Graf H_n dibenanamkan pada buku sebagai berikut. Letakkan sisi-sisi dengan urutan sebagai berikut:

$$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}.$$

Kemudian letakkan sisi-sisi $b_i c_i$ ($1 \leq i \leq n + 1$), $b_i b_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n$), $c_i b_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n$), dan $a_1 b_{n+1}$ serta $a_1 c_{n+1}$ tanpa perpotongan pada halaman satu. Pada halaman dua, letakkan sisi-sisi $a_i c_i$ ($1 \leq i \leq n + 1$), $a_i a_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n$), dan $c_i a_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n$) tanpa perpotongan. Pada halaman tiga, letakkan sisi-sisi $b_1 a_{n+1}$ dan $b_1 c_{n+1}$ tanpa perpotongan. Sehingga dibutuhkan tiga halaman untuk pembenanaman H_n , jadi $\rho(H_n) \leq 3$. Dengan demikian $\rho(H_n) = 3$. \square

Pembenanaman H_5 dapat dilihat pada Gambar 7. Simpul-simpul diletakkan pada punggung. Sisi-sisi di atas simpul adalah pada halaman satu, sedangkan sisi-sisi yang digambar garis bersambung di bawah simpul adalah pada halaman dua, sedangkan sisi-sisi yang digambar dengan garis putus-putus di bawah simpul adalah pada halaman tiga.



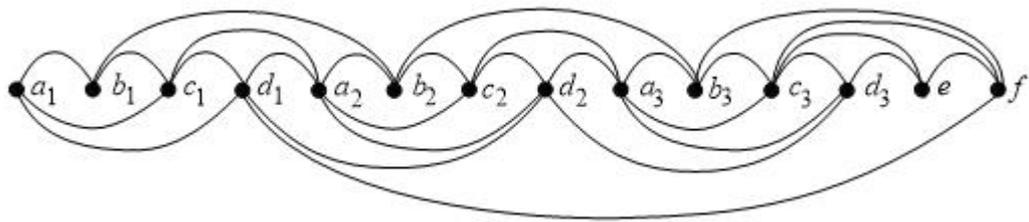
Gambar 6. Sebuah pembenaman H_5 .

Teorema 2. Biarkan $n \geq 3$. Maka $\rho(M_n) = 3$.

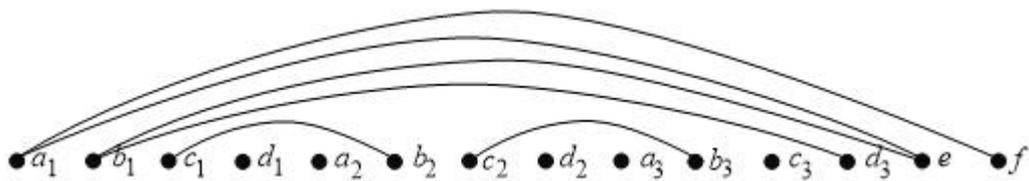
Bukti. Pinontoan dan Richter [6] telah menghitung angka perpotongan graf M_n ($n \geq 3$) yaitu 6. jadi M_n tidak planar sehingga itu membutuhkan tiga halaman untuk pembenaman buku. Dengan kata lain, $\rho(M_n) \geq 3$.

Untuk membuktikan bahwa $\rho(M_n) \leq 3$, akan ditunjukkan gambar pembenaman buku M_n pada tiga halaman. Letakkan simpul-simpul M_n pada punggung dengan urutan sebagai berikut $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, \dots, a_n, b_n, c_n, d_n, e$, dan f . Kemudian, letakkan sisi-sisi berikut pada halaman satu: $a_k b_k, b_k c_k, c_k d_k$ ($1 \leq i \leq n$), $b_k b_{k+1}$ ($1 \leq i \leq n - 1$), $b_k c_{k+1}$ ($1 \leq i \leq n - 1$), dan sisi-sisi $c_n e, d_n e, e f, b_n f$, serta $c_n f$. Pada halaman dua, letakkan sisi-sisi berikut $a_k c_k, a_k d_k$ ($1 \leq i \leq n$), $d_k d_{k+1}$ ($1 \leq i \leq n - 1$), dan $d_1 f$. Terakhir, pada halaman tiga, letakkan sisi-sisi $c_k b_{k+1}$ ($1 \leq i \leq n - 1$), dan juga sisi-sisi $a_1 e, a_1 f, b_1 e$, serta $b_1 d_n$. Sehingga dibutuhkan tiga halaman untuk pembenaman M_n pada buku, jadi $\rho(M_n) \leq 3$. Dengan demikian $\rho(M_n) = 3$. \square

Gambar 8 menyajikan contoh pembenaman buku M_3 . Simpul-simpul diletakkan pada punggung, sisi-sisi di atas simpul, adalah pada halaman satu, sisi-sisi di bawah simpul yang digambar dengan garis bersambung adalah pada halaman dua pada Gambar 8(a). Sedangkan sisi-sisi pada Gambar 8(b) adalah pada halaman tiga.



(a) Halaman 1 dan Halaman 2.



(b) Halaman 3.

Gambar 7. Sebuah penbenaman buku M_3 .

BAB 6

KESIMPULAN DAN SARAN

Famili graf tak hingga $P(m, 2)$ adalah perpotongan kritis dengan rata-rata energi derajat maximum 6, jika $m \rightarrow \infty$.

DAFTAR PUSTAKA

- Adiga, C and Smitha, M. 2009. On Maximum Degree Energy of a Graph. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 4, No. 8, 385 – 396.
- Balakrishnan, R. 2004. The energy of a graph. *Linear Algebra and its Applications* 387, 287–295.
- Balogh J and Salazar G 2015 Book embeddings of regular graphs. *SIAM Journal in Discrete Mathematics* **29** 811-22.
- Chung F R T , Leighton F T and Rosenberg A L 1987 Embedding graphs in books: a layout problem with applications to VLSI design, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* **8** 33-58.
- Kainen P C 1974 An introduction to topological graph theory, in *Graphs and Combinatorics*, Ed R Bari and F Harary (New York: Springer) pp 76-108.
- Malitz S M 1994 Graphs with E edges have pagenumber $O(\sqrt{E})$, *J. Algorithms* **17** (1) 71–84.
- Mohar B and Dvořák Z 2016 Crossing numbers of periodic graphs. *J. Graph Theory* **83** 34-43.
- Pinontoan B and Richter R B 2003 Crossing numbers of sequences of graphs II: planar tiles. *J. Graph Theory* **42** 332-41.
- Richter R B and Thomassen C 1993 Minimal graphs with crossing number at least k . *J. Combin.Theory Ser. B.* **58** (2) 217-23.

Lampiran

Surat Tugas Penelitian