BAB I
KONSEP DASAR PELUANG

Pada bab ini akan dibahas konsep dasar peluang dari suatu peristiwa. Oleh karena itu, sebelum membahas konsep dasar peluang akan dijelaskan terlebih dahulu hal-hal yang berkaitan dengan peristiwa, yaitu ruang sampel dan peristiwa itu sendiri. Selanjutnya, pembahasan perhitungan selengkapnya adalah peluang berdasarkan tehnik membilang, peluang bersyarat, dalil bayes, peluang dua peristiwa yang saling bebas.

1.1 RUANG SAMPEL

Kita akan memperoleh ruang sampel, jika kita melakukan suatu eksperimen atau percobaan. Eksperimen di sini merupakan eksperimen acak. Berikut ini, akan dijelaskan pengertian eksperimen acak. Misalnya kita melakukan suatu eksperimen yang diulang beberapa kali, dengan kondisi identic dan alat yang sama. Maka, pada dasarnya masing-masing eksperimen itu memberikan hasil yang sama. Akan tetapi, ada suatu eksperimen yang kalau diulang beberapa kali, masing-masing pengulangan eksperimen itu memberikan hasil yang belum tentu sama sekalipun kondisi pengulangan eksperimen itu sama. Eksperimen seperti itu dinamakan *eksperimen acak* atau *pengamatan acak*, dan disingkat eksperimen atau pengamatan saja. Dalam eksperimen acak, hasil dari pengulangannya tidak bisa diperkirakan dahulu sebelumnya, akan tetapi hasilnya terjadi secara kebetulan. Dari uraian diatas, kita bisa mengetahui eksperimen acak, yaitu:

1. Hasil eksperimennya merupakan himpunan semua hasil yang mungkin
2. Eksperimen diulang beberapa kali dengan kondisi tidak berubah
3. Hasil pengulangan eksperimen terjadi secara kebetulan

Berikut ini kita akan memberikan beberapa contoh eksperimen acak.

Contoh 1.1

Jika kita melakukan eksperimen mengenai pengundian sebuah mata uang logam Rp 100, maka hasil yang mungkin dari pengundian itu bisa HURUF “ BANK INDONESIA” atau GAMBAR “KARAPAN SAPI”.

Misalnya waktu pertama kali pengundian itu dilakukan hasilnya berupa GAMBAR “KARAPAN SAPI”. Apabila pengundian itu diulang beberapa kali, maka hasilnya belum tentu GAMBAR “KARAPAN SAPI” semua, tetapi mungkin saja hasilnya ada yang berupa HURUF “ BANK INDONESIA”. Eksperimen seperti ini termasuk ekperimen acak.

Contoh 1.2

Misalnya kita melakukan eksperimen mengenai pengundian sebuah dadu yang seimbang. Apabila kita melakukan pengulangan pengundian itu, maka hasilnya belum tentu sama dengan hasil pada waktu pengundian itu dilakukan pertama kali. Dalam hal ini, hasil dari masing-masing pengualangan pengundian itu sudah pasti merupakan salah satu dari kemungkinan – kemungkinan berikut : MATA 1, MATA 2, MATA 3, MATA 4, MATA 5 atau MATA 6. Eksperimen seperti ini juga termasuk eksperimen acak. Setelah kita melakukan sebuah eksperimen, maka tentunya kita akan memperoleh hasil-hasil yang mungkin dari eksperimen itu.

Definisi 1.1 : RUANG SAMPEL

Apabila kita melakukan sebuah eksperimen, maka semua hasil yang mungkin diperoleh darinya dinamakan ruang sampel. Adapun, masing-masing hasil yang mungkin dari eksperimen-eksperimen atau setiap anggota dari ruang sampel dinamakan titik-titik sampel.

Penulisan ruang sampel biasanya digunakan huruf kapital yaitu S.

Ruang sampel ini ada dua macam, yaitu ruang sampel diskrit dan ruang sampel kontinu.

Defenisi dari keduan macam ruang sampel ini dijelaskan berikut ini.

Defenisi 1.2: RUANG SAMPE DISKRIT

Ruang sampel diskrit adalah ruang sampel yang mempunyai banyak anggota berhingga atau tidak berhingga tetapi dapat dihitung.

Pemahaman uraian ruang sampel diskrit ini diperjelas melalui contoh 1.3.

Contoh 1.3

Jika kita melakukan eksperimen mengenai pengundian sebuah mata uang logam Rp 100, maka ruang sampelnya adalah;

$$S = \{G, H\}$$

dengan : G= GAMBAR " KARAPAN SAPI"

H= HURUF "BANK INDONESIA"

Dalam hal ini, G saja dan H saja masing-masing dinamakan titik-titik sampel.

Contoh 1.4

Jika kita melakukan eksperimen mengenai pengundian sebuah dadu, maka ruang sampelnya berisi salah satu dari hasil sebagai berikut: mata1, mata 2, mata 3, mata 4, mata5, dan mata 6.

Jadi ruang sampelnya di tulis: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Dalam hal ini, 1 saja, 2 saja, 3 saja, 4 saja, 5 saja, dan 6 saja masing-masing dinamakan titik sampel.

Contoh 1.5

Jika kita melakukan esperimen mengenai pengundian sebuah mata uang logam Rp 100 sebanyak 3 kali dan kita akan memperhatikan banyak HURUF "BANK INDOSESIA" (*H*) yang muncul, maka ruang sampelnya berisi salah satu dari hasil sebagai berikut:

a. *H* tidakakan muncul, artinya GAMBAR "KARAPAN SAPI" (*G*) muncul tiga kali, atau H =0.

b. *H* akan muncul sekali dan G akan muncul dua kali, atau H=1.

c. *H* akan muncul dua kali dan G akan muncul sekali, atau H=2.

d. *H* akan muncul tiga kali, artinya G tidak akan muncul, atau H=3.

Jadi ruang sampel ditulis: $S = \{0,1,2,3\}$.

Dalam hal ini, 0 saja, 1 saja, 2 saja, dan 3 saja masing-masing dinamakan titik-ik sampel.

Contoh 1.6

Misalnya kita melakukan eksperimen mengenai pelemparan sebuah mata uang logam Rp 100 sampai muncul GAMBAR "KARAPAN SAPI" pertama kali. Tentukan ruang sampel.

Penyelesaian:

Dalam hal ini, hasil dari eksperimen ini mempunyai banyak kemungkinan, yaitu:

a. Pada pelemparan perama muncul *G*, sehingga hasilnya ditulis *G*.

b. Pada pelemparan pertama muncul *H* dan pelemparan kedua muncul *G*, Sehingga hasilnya ditulis *HG*.

c. Pada pelemparn pertama dan kedua muncul *H* dan pelemparan ketiga muncul *G*, sehingga ditulis *HHG*.

Jadi ruang sampelnya adalah: $S = \{G, HG, HHG, \dots\}$

Definisi 1.3: RUANG SAMPEL KONTINU

Ruang sampel kontinu adalah ruang sampel yang anggotanya merupakan interval pada garis bilangan real.

Pemahaman ruang sampel kontinu diperjelas melalui contoh 1.7.

Contoh 1.7

Misalnya perusahaan bola lampu "KUAT" memproduksi sebuah bola lampu baru. Kita akan melihat masa hidup (dalam jam) bola lampu itu.

Tentukan ruang sampelnya.

Penyelesaian:

Karena masa hidup bola lampu bernilai bilangan real positif, maka ruang sampelnya adalah:

$$S = \{t: t > 0\}$$

Kita bisa menentukan beberapa peristiwa dari ruang sampel *S*. Berikut ini kita akan membahas bebrapa definisi yang berkaitan dengan peristiwa.

Definisi 1.4: PERISTIWA

Sebuah peristiwa adalah sebuah himpunan bagian dari ruang sampel S. Setiap himpunan bagian dari ruang sampel S merupakan sebuah peristiwa.

Notasi untuk menyatakan sebuah peristiwa biasanya ditulis dengan huruf capital, misalnya *A*, *B*, *C*, *D* dan sebagainya kecuali *S*.

Karena sebuah peristiwa itu merupakan himpunan bagian dari ruang sampel *S*. Maka ada tiga kemungkinan yang bisa terjadi, yaitu

1. *S* itu sendiri merupakan sebuah peristiwa.
2. $\emptyset$ juga merupakan sebuah peristiwa.
3. Beberapa hasil yang mungkin dari *S* merupakan sebuah peristiwa.

Kita sudah mengetahui bahwa jika kita melakukan eksperimen, maka kita akan memperoleh hasil-hasil yang mungkin darinya yang dinamakan ruang sampel. Sama seperti halnya eksperimen, jika kita bisa menentukan peristiwa, maka kita bisa menentukan hasil-hasil yang termasuk ke dalam peristiwa itu. Hasil-hasil tersebut lebih lanjut dinamakan *ruang peristiwa*.

Definisi 1.5: TERJADINYA PERISTIWA

Sebuah peristiwa dikatakan terjadi, jika ada anggota dari ruang peristiwanya merupakan hasil dari eksperimen.

Berikut ini kita akan memberikan beberapa contoh yang berkaitan dengan peristiwa**.**

Contoh 1.8

Jika kita melakukan pengundian dua mata uang logam Rp 100 secara sekaligus, maka ruang sampelnya adalah: $S = \{HH, HG, GH, GG\}$.

Tuliskan enam buah peristiwa disertai dengan ruang peristiwanya.

Penyelesaian:

a. A: Peristiwa munculnya G semuanya.
   Ruang peristiwa dari A adalah: $A = \{GG\}$
b. B: Peristiwa munculnya H semuanya.
   Ruang peristiwa dari B adalah: $B = \{HG, GH\}$
c. C: Peristiwa munculnya G paling sedikit sebuah.
   Ruang peristiwa dari C adalah: $C = \{HG, GH, GG\}$
d. D: Peristiwa munculnya H paling banyak sebuah.
   Ruang peristiwa dari D adalah: $D = \{GH, HG, GG\}$

e. E: Peristiwa munculnya H paling sedikit dua buah.

Ruang peristiwa dari E adalah: $E = \{HG, GH, GG\}$

f. Peristiwa munculnya G lebih dari dua buah. Ruang peristiwa G adalah: $F = \{\ \}\ atau\ F = \{\emptyset\}$.

Jika kita mengambil sebuah anggota peristiwa, misalnya *HG* , maka peristiwa-peristiwa, B, C dan D dikatakan telah terjadi. Hal ini bisa dilihat bahwa masing-masing peristiwa tersebut mempunyai *HG* sebagai anggota dari ruang peristiwa. Dengan kata lain, $HG \in B,\ HG \in C,$ dan $HG \in D$. Adapun, peristiwa-peristiwa A, E, dan F dikatakan tidak terjadi, karena $HG \notin A, HG \notin E,$ dan $HG \notin F$.

Contoh 1.9

Kita sudah mengetahui bahwa ruang sampel dari pengundian sebuah dadu adalah $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Tuliskan enam buah peristiwa disertai dengan ruang peristiwanya.

Penyelesaian.

a. *A*: Peristiwa muncul mata dadu yang bernilai kurang dari 4. Ruang peristiwa dari A adalah:

$$A = \{1,2,3\}$$

b. *B:* Peristiwa munculnya mata dadu yang merupakan bilangan ganjil. Ruang peristiwa dari B adalah: $B = \{1,3,5\}$

c. *C:* Peristiwa munculnya mata dadu yang bernilai habis dibagi 5. Ruang peristiwa dari *C* adalah*:*$C = \{5\}$

d. *D:* Peristiwa munculnya mata dadu yang bernilai terbesar. Ruang peristiwa D adalah: $D = \{6\}$

e. *E:* Peristiwa munculnya mata dadu yang merupakan bilangan cacah. Ruang peristiwa dari *FG* adalah: $E = \{2,3,5\}$.

Jika kita mengambil sebuah anggota peristiwa, misalnya 6, maka peristiwa-peristiwa D dan E dikatakan telah terjadi. Hal ini bias dilihat bahwa $6 \in D$ dan $6 \in E$. Adapun peristiwa-peristiwa A,B,C, dan F dikatakan tidak terjadi, karena $6 \notin A, 6 \notin B, 6 \notin C$ dan $6 \notin F$.

Kita sudah mengetahui bahwa dari ruang sampel S bisa dibentuk beberapa peristiwa. Sebuah peristiwa akan memberikan ruang peristiwanya. Sebaliknya, kita bisa menentukan peristiwa, jika ruang peristiwanya diketahui.

Pemahaman uraian tersebut diperjelas melalui contoh 1.10.

Contoh 1.10

Misalnya kita melakukan pengundian tiga mata uang logam Rp 100 secara sekaligus.

Tentukan peristiwanya, jika ruang peristiwanya sebagai berikut.

a. $A = \{HHG, HGH, GHH\}$

b. $B = \{HGG, GHG, GGG, GGH\}$

c. $C = \{GHH, GHG, GGH, GGG\}$

D. $D = \{HHH, HGH, GHH, GGH\}$

Penyelesaian:

a. A: Peristiwa munculnya H tepat dua buah.

b. B: Peristiwa munculnya G paling sedikit dua buah atau peristiwa munculnya H paling banyak sebuah.

c. Peristiwa munculnya G pada mata uang logam pertama.

d. Peristiwa munculnya H pada mata uang logam ketiga.

Operasi-operasi pada himpunan dapat diterapkan pada peristiwa-peristiwa dalam ruang sampel S, sehingga kita akan memperoleh peristiwa lainnya dalam sebagai hasil dari pengoperasian tersebut.

Jika A dan B merupakan dua buah peristiwa, maka:

1. $A \cup B$ merupakan sebuah peristiwa yang terjadi, jika A terjadi dan B terjadi. (atau kedua-duanya terjadi).
2. $A \cap B$ merupakan sebuah peristiwa yang terjadi, jika A terjadi dan B terjadi.
3. A^c, komplemen dari A, merupakan sebuah peristiwa yang terjadi, jika A tidak terjadi.

Pemahaman operasi pada himpunan terhadap peristiwa diperjelas melalui contoh 1.11.

Contoh 1.11

Jika kita melakukan pengundian tiga mata uang logam Rp 100 secara sekaligus, maka ruang sampelnya adalah:

$$S = \{GGG, GGH, GHG, HGG, GHH, HGH, HHG, HHH\}$$

Berikut ini kita akan memberikan beberapa peristiwa, yaitu:

A : Peristiwa banyak G melebihi banyak H.

B : Peristiwa banyak G yang muncul tepat dua kali.

C : Peristiwa banyak H yang muncul paling sedikit dua kali.

D : Peristiwa munculnya mata uang logam kedua bukan H.

Tentukan peristiwa-peristiwa disertai dengan ruang peristiwanya pada peristiwa-peristiwa berikut ini:

a. $E = B \cap D$

b. $F = C^c$

c. $G = A \cup B$

d. $D = C \cap D$

e. $I = B^c \cap C$

Penyelesaian:

Ruang peristiwa dari A adalah: $A = \{GGG, GGH, GHG, HGG\}$

Ruang peristiwa dari B adalah: $B = \{GGH, GHG, HGG\}$

Ruang peristiwa dari C adalah: $C = \{HHG, HGH, GHH, HHH\}$

Ruang peristiwa dari D adalah: $D = \{GGG, GGH, HGG, HGH\}$

a. $E = B \cap D$ adalah peristiwa banyak G yang muncul tepat dua kali dan munculnya mata uang logam kedua bukan H. Ruang peristiwa dari E adalah: $E = \{GGH, HGG\}$.

b. $F = C^c$ adalah peristiwa banyak H yang muncul kurang dari dua kali. Ruang peristiwa dari F adalah: $F = \{GGG, HGG, GHG, GGH\}$.

c. $G = A \cup B$ adalah peristiwa banyak G melebihi banyak H atau banyak G yang muncul tepat dua kali. Ruang peristiwa dari G adalah: $G = \{GGG, GHG, GGH, HGG\}$

d. $H = C \cap D^c$ adalah peristiwa banyak H yang muncul paling sedikit dua kali dan munculnya mata uang logam kedua adalah H. Ruang peristiwa dari H adalah: $H = \{HHG, GHH, HHH\}$.

e. $I = B^c \cup D$ adalah peristiwa banyak G yang muncul tidak tepat dua kali dan munculnya mata uang logam bukan H. Ruang peristiwa dari I adalah:

$$I = \{HHH, HHG, HGH, GHH, GGG, GGH, HGG\}$$

1.2 KONSEP PELUANG

Penentuan terjadinya sebuah peristiwa di tentukan oleh nilai peluang dan perhitungannya didasarkan pada perumusan secara umum. Sehingga peluang dapat diartikan sebagai ukuran yang digunakan untuk mengetahui terjadinya atau tidak terjadinya sebuah peristiwa.

Sebuah peristiwa yang terjadi pasti mempunyai nilai peluang yang besarnya antara nol.dan satu. Adapun, peristiwa yang sudah pasti terjadi akan mempunyai nilai peluang sebesar satu. Akan tetapi, peristiwa yang pasti sudak tidak terjadi akan mempunyai nilai peluang sebesar nol. Dalam hal ini, kita jarang menjumpai sebuah peristiwa yang mempunyai nilai peluang tepat sama dengan satu. Kita biasanya sering menjumpai sebuah peristiwa yang mempunyai nilai peluang antara nol dan satu. Pemahaman uraian diatas diperjelas melalui contoh 1.12.

Contoh 1.12:

Pada penyisihan Piala Dunia Zona Asia Tenggara, kesebelasan Indonesia melawan kesebelasan Brunei Darussalam. Dalam hal ini, kita tidak bisa mengatakan bahwa kesebelasan Indonesia sudah pasti menang, sebingga peluangnya sebesar satu. Kita mungkin bisa mengatakan bahwa kesebelasan Indonesia akan menang dengan peluang sebesar 0,80. Dengan demikian, kesebelasan Indonesia akan kalah atau hasilnya akan seri dengan peluang sebesar 0,20.

Kita bisa mengatakan sebuah peristiwa mempunyai nilai peluang sebesar nol dan satu, jika kita sudah mengetahui kondisi yang memungkinkan terjadinya peristiwa itu. Berikut ini kita akan menjelaskan definisi peluang secara aksioma.

Definisi 1.6: Peluang secara AKSIOMA

Misalnya S menunjukkan ruang sampel eksperimen A menunjukkan kumpulan semua peistiwa yang bisa di bentuk dari S. peluang P(.) adalah sebuah fungsi domain A dan daerah hasilnya [0,1]yang memenuhi sifat-sifat berikut:

i. *P(A)* ≥ 0, *untuk* $A \in \boldsymbol{A}$

ii. *P(S) = 1*

iii. *jika* $A_1, A_2, \dots, A_m$ *adalah m buah peristiwa yang saling lepas dalam* $\boldsymbol{A}$ (*artinya* $A_i \cap A_j = \emptyset\ untuk\ i \neq j; i, j = 1,2,3, \dots, m$)

dan $A_1 \cup A_2 \cup, \dots, A_1 \cup A_m = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \in \boldsymbol{A}$,

maka: $P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = P(A_1 \cup A_2 \cup, \dots, A_1 \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m)$

$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$.

Berdasarkan definisi di atas, P(.) disebut juga *fungsi peluang.* P(A) dibaca sebagai “ peluang peristiwa A”,atau ”peluang terjadinya peristiwa A”, atau “peluang bahwa peristiwa A terjadi.”

Apabila kita melakukan sebuah eksperimen yang menghasilkan banyak anggota ruang sampelnya (jadi S merupakan himpunan berhingga), maka setiap titik sampel bisa dianggap sebagai sebuah peristiwa yang mempunyai satu anggota. Peristiwa yang mempunyai satu anggota ini disebut peristiwa anggota-tunggal. Demikian juga setiap anggota yang termasuk ke dalam sebuah peristiwa bisa dianggap sebagai peristiwa anggota tunggal.

Perhitungan peluang dari sebuah peristiwa didasarkan pada peluang dari peristiwa-peristiwa angota-tunggal. Berikut ini kita akan menjelaskan defenisi dari peristiwa anggota-tunggal.

Definisi 1.7: PERISTIWA ANGGOTA-TUNGGAL

Sebuah peristiwa anggota-tunggal A adalah sebuah himpinan bagian dari ruang sampel S yang hanya mmpunya satu anggota. Dengan kata lain, jika ada satu $x \in S$ *sedemikian hingga* $x \in A \subset S$, *maka A merupakan peristiwa angota-tunggal.*

Pemahaman uraia dalam defenisi 1.7 diperjelas melalui contoh 1.13.

Contoh 1.13:

Jika ruang sampel dari tiga buah eksperimen masing-masing berbentuk:

a. $S = \{G, H\}$

b. $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

c. $S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

Tentukan peristiwa-peristiwa anggota-tunggal pada masing-masing S diatas.

Penyelesaian:

a. $\{G\}, \{H\}$.

b. $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$.

c. $\{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\}$

Perhitungan peluang sebuah peristiwa bisa dilakukan dengan dua cara, yaitu:

1. PETI ANGDAKSA

Istilah ini merupakan singkatan dari PEluang seTIap ANGgota tiDAK SAma.

Jadi misalnya ruang sampel $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, dengan peluang setiap titik sampelnya sebagai berikut:

$\mathrm{P}(\{a_1\}) = p_1$

$\mathrm{P}(\{a_2\}) = p_2$

$\mathrm{P}(\{a_3\}) = p_3$

$\mathrm{P}(\{a_4\}) = p_4$

$\mathrm{P}(\{a_5\}) = p_5$

Ruang peristiwa dari A adalah: $A = \{a_1, a_3, a_4\}$.

Maka peluang terjadinya peristiea A adalah:

$\mathrm{P}\ (A) = \mathrm{P}\left(\{a_{1,} a_3, a_4\}\right)$

$\quad = \mathrm{P}(\{a_1\}) + \mathrm{P}(\{a_3\}) + \mathrm{P}(\{a_4\})$

$\mathrm{P}\ (A) = p_1 + p_3 + p_4$

Contoh 1.14

Misalkan ira melakukan pengundian sebuah dadu sekali. Dadu itu diberati sesuatu pada setiap mata dadunya sedemikan hingga $\mathrm{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(\{2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(\{3\}) = \frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(\{4\}) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(\{5\}) = \frac{1}{24}$, dan $\mathrm{P}(\{6\}) = \frac{1}{24}$.

Jika A adalah peristiwa munculnya mata dadu yang merupakan bilangan prima, maka hitung P(A).

Penyelesaian:

Ruang penyelesaian dari A adalah:

$A = \{2,3,5\}$

$\mathrm{P}\ (A) = \mathrm{P}(\{2,3,5\})$

$= \mathrm{P}(\{2\}) + \mathrm{P}(\{3\}) + \mathrm{P}(\{5\})$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}$

$\mathrm{P}\ (A) = \frac{11}{24}$

2. PETI ANGSA

Istilah ini merupakan singkatan dari PEluang seTIap ANGgota SAma.

Jika sebuah ruang sampel mempunyai n buah titik sampel (peristiwa anggota-tunggal) dan setiap titik sampel mempunyai peluang yang sama untuk terjadi, maka besarnya peluang untuk setiap titik sampel adalah $\frac{1}{n}$.

Sebuah peristiwa A mempunyai k buah anggota, yang mempunyai ruang peristiwanya dan setiap anggotanya merupakan peristiwa anggota-tunggal.

Karena sebuah peristiwa merupakan gabungan dari beberapa peristiwa anggota-tunggal peristiwa $A \subset S$ dihitung sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{k}{n}$$

Dalam hal ini, P(A) bisa diperoleh dengan menggunakan PETI ANGDAKSA.

Misalnya $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{+1}, \ldots, a_m\}$

A $= \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

Jadi P(A) $= \mathrm{P}(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\})$

$= \mathrm{P}(\{a_1\}) + \mathrm{P}(\{a_2\}) + \cdots + \mathrm{P}(\{a_k\})$

$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$

P(A) $= \frac{k}{n}$

Pemahaman uraian di atas diperjelas melalui contoh 1.15.

Contoh1.15

Farah melakukan pengundian dua buah dadu yang seimbang sekali. Hitung P(A) dan P(B) jika:

a. A: Peristiwa munculnya kedua mata dadu itu bernilai sama.

b. B: Peristiwa munculnya kedua mata dadu itu bernilai 4.

Penyelesaian:

Ruang sampelnya tersiri atas 36 titik sampel (*n*(*S*)=36), yang masing-masing mempunyai peluang sebesar $\frac{1}{36}$, yaitu:

$S =$
$\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(2,6),(3,1),(3,2),\ldots,(3,6),(4,1),(4,2),\ldots,$
$(4,6),(5,1),(5,2),\ldots(5,6),(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$

a. Ruang peristiwa dari A adalah:

A=$(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

n(A) = $k = 6$

Jadi: P(A)= $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

b. Ruang peristiwa dari B adalah

A=$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

Jadi: P(B) $=(\{(1,3),(2,2),(3,1)\})$

$= P(\{(1,3)\})+ P(\{(2,2)\}) + P(\{(3,1)\})$

$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$

P(B) $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Berikut ini kita akan menjelaskan beberapa dalil tentang besarnya peluang P(.).

Misalnya S adalah ruang sampel eksperimen, **A** adalah kumpulan semua peristiwa yang bisa di bentuk dari S, dan P(.) adalah peluang sebuah peristiwa.

Dalil 1.1: PELUANG PERISTIWA HIMPUNAN KOSONG

Jika peristiwa himpunan kosong dinyatakan dengan $\emptyset$, maka:

$$P(\emptyset) = 0$$

Bukti:

Karena $S \cup \emptyset =$ dan S dan $\emptyset$ merupakan dua peristiwa yang saling lepas, maka:

P$(S \cup \emptyset) = P(S)$

P$(S) + P(\emptyset) = P(S)$

P$(\emptyset) = 0$,(terbukti)

Dalil 1.2: PELUANG KOMPLEMEN PERISTIWA

Jika A adalah sebuah peristiwa dalam A, maka:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Bukti:

Dalam hal ini, A dan A^c merupakan dua peristiwa yang saling lepas.

Kedua peristiwa A dan A^c bisa dilihat dalam gambar 1.1.

Gambar 1.1 peristiwa A dan A^c

Dari gambar 1.1 diperoleh:

$A \cup A^c = S$

$P(A \cup A^c) = P(S)$

Karena A dan A^c merupakan dua peristiwa yang saling lepas, maka:

$P(A) + P(A^c) = 1$

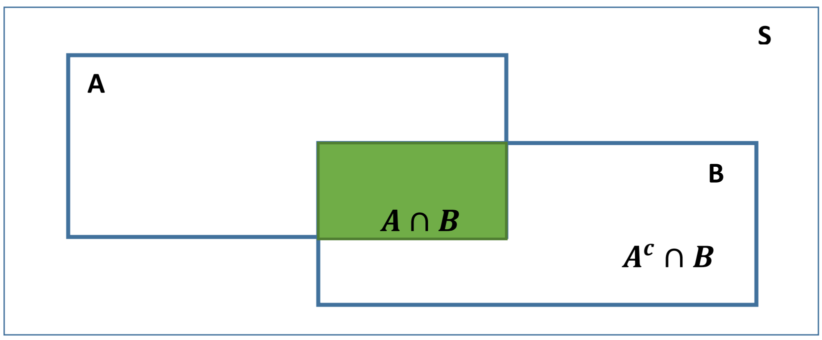
$P(A^c) = 1 - P(A)$(terbukti)

Dalil 1.3: PELUANG DUA PERISTIWA INKLUSIF

Untuk setiap peristiwa A dan B dalam **A** berlaku:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bukti:



Gambar 1.2 Peristiwa $A \cap B$ dan $A^c \cap B$

Dari gambar 1.2 diperoleh:

$A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$

Dan $B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$

Karena A dan $B \cap A^c$ merupakan dua peristiwa yang saling lepas, maka:

P$(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$

Karena $(A \cap B)\ dan\ (B \cap A^c)$ merupakan dua peristiwa yang saling lepas, maka:

P$(B) = P(A \cap B) + (B \cap A^c)$

P$(A \cup B) = P(A) + [\mathrm{P}(B) - P(A \cap B)]$

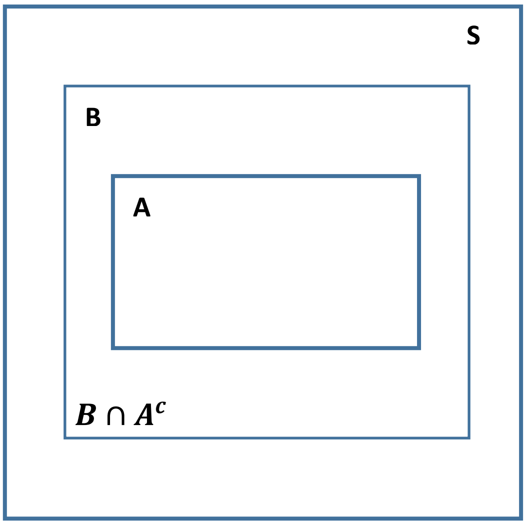
Jadi: P$(A \cup B) = P(A) + \mathrm{P}(B) - P(A \cap B)$ (terbukti)

Dalil 1.4: PELUANG PERISTIWA BAGIAN

Jika A dan B $\in \boldsymbol{A}$ *dan* $A \subset \boldsymbol{B}$*, maka:*

$$P(A) \leq \mathrm{P}(B)$$

Bukti :



Gambar 1.3 Peristiwa $A \subset B$

Dari gambar 1.3 diperoleh:

B= $A \cup (B \cap A^c)$

Karena A dan $(B \cap A^c)$ merupakan dua titik yang saling lepas, maka:

P$(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$

Karena $P(B \cap A^c) > 0$, maka:

P$(A) \geq$ P(B) (terbukti)

Peluang sebuah peristiwa, misalnya P(A), memenuhisifat dari peluang. Hal ini bisa dilihat dalam dalil 1.5.

Dalil 1.5: SIFAT PELUANG

Jika S mempunyai n anggota, maka:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Memenuhi sifat pekuang.

Bukti:

a. Karena A mempunyai himpunan bagian dari S, maka A mempunyai anggota yang merupakan bilangan tidak negative, artinya $n(A) \geq 0$

b. Jika S mempunyai n anggota, maka $n(S) = n$.

Jadi: $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$

c. Jika $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$, maka $A_i \cap A_j$ tidak mempunyai anggota.

Kita mengetahui bahwa:

$n((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_m)$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) &= \frac{n((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_m)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A_1)}{n(S)} + \frac{n(A_2)}{n(S)} + \frac{n(A_m)}{n(S)} \\ P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m) \end{aligned}$$

Pemahaman sifat dari fungsi peluang diperjelas melalui contoh1.16.

Contoh 1.16

Ruang sampel dari pengundian sebuah dadu yang seimbang adalah:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Jika S_1 adalah peristiwabahwa mata dadu yang muncul bernilai kurang dari 4 dan S_2 adlah peristiwa bahwa mata dadu yang muncul paling sedikit 4, maka hitung:

a. $P(S_1)$

b. $P(S_1^c)$

c. $P(S_1 \cap S_2)$

d. $P(S_1 \cup S_2)$

Penyelesaian:

Jika S_1 adalah peristiwa bahwa mata dadu muncul bernilai kurang dari 4. Ruang peristiwa dari S_1 adalah:

a. $S_1 = \{1,2,3\}$

$P(S_1) = P(\{1,2,3\})$

$= P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\})$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$P(S_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b. $P(S_1^c) = 1 - P(S_1)$

$= 1 - \frac{1}{2}$

$P(S_1^c) = \frac{1}{2}$

c. S_2:Peristiwa bahwa mata dadu yang muncul bernilai kurang dari 4. Ruang peristiwa dari S_2 adalah:

$S_2 = \{4,5,6\}$

Jadi $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

$P(S_1 \cap S_2) = P(\emptyset) = 0$

d. $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$P(S_1 \cup S_2) = 1$

1.3. PELUANG BERDASRAKAN TEHNIK MEMBILANG

Dalam perhitungan sebuah peristiwa berdasarkan aturan perkalian ditentikan berdasarkan aturan perkalian, permutasi, sampel yang berurutan, dan kombinasi.

A. Aturan Perkalian

Perhitungan nilai peluang sebuah peristiwa berdasarkan aturan perkalian digunakan rumus sebagai berikut.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan: *n(A)* = banyak anggota peristiwa *A* yang diperoleh berdasarkan aturan perkalian.

n(S) = banyak anggota keseluruhan berdasarkan aturan perkalian.

Pemahaman rumus diatas diperjelas melalui contoh 1.17.

Contoh 1.17:

Misalnya ada enam buah nangka, yaitu 2,3,5,6,7, dan 9. Kemudian kita akan membentuk sebuah bilangan yang terdiri asta tiga angka dan setiap angka hanya digunakan sekali saja.

a. Berapa peluang banhwa bilangan yang dibentuk itu bernilai paling besar 753 ?

b. Berapa peluang bahwa bilangan yang dibentuk merupakan bilangan genap?

Penyelesaian:

Bilangan yang terdiri atas tiga angka itu adalah $A_1, A_2,$ dan A_3.

A_1	A_2	A_3

Kita akan menghitung dahulu banyak bilangan keseluruhan yang bisa dibentu, yang dinotasikan dengan *n(S)*.

A_1 bernilai ratusan terdiri atas 6 angka.

A_2 bernilai puluhan terdiri atas 5 angka.

A_3 bernilai satuan terdiri atas 4 angka.

Jadi: *n(S)* = $(6 \times 5 \times 4)$ cara = 120 buah.

a. Misalnya *A*: peristiwa bahwa bilangan yang dibentuk itu bernilai paling besar 753.

i. Ratusan terdiri atas angka-angka 2,3,5, dan 6.

A_1 bernilai ratusan terdiri atas 4 angka.

A_2 bernilai puluhan terdiri atas 5 angka.

A_3 bernilai satuan terdiri atas 4 angka.

Banyak bilangan yang dibentuk = $(4 \times 5 \times 4)$ buah= 80 buah.

ii. Rtusan hanya angka 7.

- A_1 bernilai ratusan terdiri atas 1 angka.
- A_2 bernilai puluhan terdiri atas 2 angka.
- A_3 bernilai satuan terdiri atas 4 angka.

  Banyak bilangan yang dibentuk = $(1 \times 2 \times 4)$ buah= 8 buah.
- A_1 bernilai ratusan terdiri atas 1 angka.
- A_2 bernilai puluhan terdiri atas 1 angka.
- A_3 bernilai satuan terdiri atas 2 angka.

  Banyak bilangan yang dibentuk = $(1 \times 1 \times 2)$ buah= 2 buah.

Sehingga banyak bilangan yang dibentuk itu bernilai paling bersar 753 = $(80 + 8 + 2)$ = 90 buah atau, *n(A)* = 90.

Jadi: *P(A)* =$\frac{90}{120} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

b. Misalnya *B*: Peristiwa bahwa bilangan yang dibentuk itu merupakan bilangan genap. Ciri sebuah bilangan merupakan bilangan genap adalah angka saruannya bernilai 2 atau 6.

A_1 bernilai ratusan terdiri atas 2 angka.

A_2 bernilai puluhan terdiri atas 5 angka.

A_3 bernilai satuan terdiri atas 4 angka.

Jadi Banyak bilangan yang dibentuk itu merupakan bilangan genap

= $(2 \times 5 \times 4)$ buah= 40 buah atau *n(B)* = 40

Sehingga: *P(B)*= $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

B. Permutasi

Perhitungan nilai peluang sebuah peristiwa berdasarkan permutasi digunakan rumus sebagai berikut.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan: *n(A)* = banyak anggota peristiwa *A* yang diperoleh berdasarkan permutasi.

n(S) = banyak anggota keseluruhan berdasarkan permutasi.

Pemahaman rumus diatas diperjelas melalui contoh 1.18.

Contoh 1.18:

Diketahui ada tiga abjad pertama, yaitu a,b, dan c.

Hitung peluang bahwa dua abjad tertentu selalu terletak berdampingan, jika kita membentuk permutasi dari ketiga abjad itu. Karena dua abjad tertentu selalu terletak berdampingan , banyak abajad yang akan dibentuk ada dua buah.

Jadi permutasi yang mungkin =2! cara.

Banyak permutasi yang dibentuk dari dua abjad yang berdampingan =2! cara.

Maka: *n(B)* = banyak susunan dua abjad tertentu yang selalu terletak berdampingan.

= (2! × 2!) cara

n(B) = 4 cara

dalam hal ini: *n(S)* = Banyak susunan keseluruhan berdasarkan permutasi yang bisa dibentuk.

= 3! Cara

n(S) = 6 cara

sehingga: *P(B)*= $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

C. Sampel yang Berurutan

Perhitungan nilai peluang sebuah peristiwa berdasarkan sampel yang berurutan dilakukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan: *n(A)* = banyak anggota peristiwa *A* yang diperoleh berdasarkan sampel yang berurutan.

n(S) = banyak anggota keseluruhan berdasarkan sampel yang berurutan.

Pemahaman rumus diatas diperjelas melalui contoh 1.19.

Contoh 1.19:

Sebuah kotak berisi 40 kelereng, dengan perincian 15 buah berwarna putih, 20 buah berwarna kuning , dan 5 buah berwarna hijau. Kemudian kita mengambil dua buah kelereng secara acak dan satu per satu. Berapa peluang bahwa dua kelereng yang terambil itu satu buah kelereng diantara berwarna kuning, jika pengambilan dua buah kelereng itu.

a. Dengan pengembalian

b. Tanpa pengembalian

Penyelesaian:

Misalnya *K*: peristiwa bahwa kelereng yang terambil itu berwarna kuning.

K: peristiwa bahwa kelereng yang terambil itu berwarna bukan kuning.

Susunan kedua kelereng yang terambil itu ada dua kemungkinan, yaitu:

i. Kelereng yang pertama terambil itu berwarna kuning dan kedua yang terambil itu bukan berwarna kuning, ditulis $K \cap K^c$.

ii. Kelereng pertama yang terambil itu berwarna kuning dan kelereng kedua yang terambil itu bukan berwarna kuning, ditulis $K^c \cap K$.

a. Pengambilan kelereng dilakukan dengan pengembalian

Misalnya *A*: peristiwa bahwa dua kelereng yang diambil dengan pengembalian dari kotak dengan satu kelereng diantaranya berwarna kuning

i. Kemungkinan pertama:. $K \cap K^c$.

Misalnya A_1: peristiwa bahwa dua kelereng yang diambil dengan pengembalian dari kotak dengan satu kelereng diantaranya berwarna kuning untuk kemungkinan pertama.

Banyak susunan kelereng pertama yang terambil berwarna kuning = 20 cara.

Banyak susunan kelereng kedua yang terambil berwarna bukan kuning = (40 – 20) cara = 20 cara.

Banyak susunan kelereng keseluruhan, baik pada pengambilan kelereng pertama maupun pada pengambilan kelereng kedua masing-masing 40 cara.

Jadi: $n(A_1)$ =Banyak susunan dua kelereng yang diambil dengan pengembalian pada kemungkinan pertama.

= (20×20) cara

$n(A_1)$ = 400 cara

$n(S)$ =Banyak susunan dua kelereng yang diambil dengan pengembalian secara keseluruhan pada kemungkinan pertama.

= (40×40) cara

$n(S)$ = 1.600 cara

Sehingga: $P(A_1) = \frac{400}{1.600} = \frac{1}{4}$

ii. Kemungkinan kedua:. $K \cap K^c$.

Misalnya A_2: peristiwa bahwa dua kelereng yang diambil dengan pengembalian dari kotak dengan satu kelereng diantaranya berwarna kuning untuk kemungkinan kedua.

Banyak susunan kelereng pertama yang terambil berwarna bukan kuning = (40 – 20) cara = 20 cara.

Banyak susunan kelereng kedua yang terambil berwarna kuning = 20 cara.

Banyak susunan kelereng keseluruhan, baik pada pengambilan kelereng pertama maupun pada pengambilan kelereng kedua masing-masing 40 cara.

Jadi: $n(A_2)$ =Banyak susunan dua kelereng yang diambil dengan pengembalian pada kemungkinan kedua.

= (20×20) cara

$n(A_2)$ = 400 cara

$n(S)$ =Banyak susunan dua kelereng yang diambil dengan pengembalian secara keseluruhan pada kemungkinan kedua.

= (40×40) cara

$n(S)$ = 1.600 cara

Sehingga: $P(A_2) = \frac{400}{1.600} = \frac{1}{4}$

Akibatnya: $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b. Pengambilan kelereng dilakukan tanpa pengembalian

Misalnya *B*: peristiwa bahwa dua kelereng yang diambil tanpa pengembalian dari kotak, dengan satu kelereng diantaranya berwarna kuning

i. Kemungkinan pertama:. $K^c \cap K$.

Misalnya B_1: peristiwa bahwa dua kelereng yang diambil dengan pengembalian dari kotak dengan satu kelereng diantaranya berwarna kuning untuk kemungkinan pertama.

Banyak susunan kelereng kedua yang terambil berwarna kuning = 20 cara.

Banyak susunan kelereng kedua yang terambil berwarna bukan kuning = (40 – 20) cara = 20 cara.

Banyak susunan kelereng keseluruhan pada pengambilan kelereng pertama ada 40 cara dan pada pengambilan kelereng kedua ada 39 cara.

Jadi: $n(B_1)$ =Banyak susunan dua kelereng yang diambil tanpa pengembalian pada kemungkinan pertama.

= (20×20) cara

$n(B_1)$ = 400 cara

$n(S)$ =Banyak susunan dua kelereng yang diambil tanpa pengembalian secara keseluruhan pada kemungkinan pertama.

= (40×39) cara

$n(S)$ = 1.560 cara

Sehingga: $P(A_1) = \frac{400}{1.560} = \frac{10}{39}$

ii. Kemungkinan kedua:. $K^c \cap K$.

Misalnya B_2: peristiwa bahwa dua kelereng yang diambil tanpa pengembalian dari kotak dengan satu kelereng diantaranya berwarna kuning untuk kemungkinan kedua.

Banyak susunan kelereng pertama yang terambil berwarna bukan kuning = (40 – 20) cara = 20 cara

Banyak susunan kelereng kedua yang terambil berwarna kuning = 20 cara.

Banyak susunan kelereng keseluruhan pada pengambilan kelereng pertama ada 40 cara dan pada pengambilan kelereng kedua ada 39 cara.

Jadi: $n(B_2)$ =Banyak susunan dua kelereng yang diambil tanpa pengembalian pada kemungkinan kedua.

= (20×20) cara

$n(B_2)$ = 400 cara

$n(S)$ =Banyak susunan dua kelereng yang diambil tanpa pengembalian secara keseluruhan pada kemungkinan kedua.

= (40×39) cara

$n(S)$ = 1.560 cara

Sehingga: $P(B_2) = \frac{400}{1.560} = \frac{10}{39}$

Akibatnya: $P(B) = P(B_1) + P(B_2)$

$= \frac{10}{39} + \frac{10}{39}$

$P(B) = \frac{20}{39}$

D. Kombinasi

Perhitungan nilai peluang sebuah peristiwa berdasarkan kombinasi dilakukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan: *n(A)* = banyak anggota peristiwa *A* yang diperoleh berdasarkan kombinasi.

n(S) = banyak anggota keseluruhan berdasarkan kombinasi.

Pemahaman rumus diatas diperjelas melalui contoh 1.20.

Contoh 1.20:

Sandy mempunyai sebuah kota berisi 15 buah kelereng terdiri atas 7 buah kelereng kuning dan 8 buah kelereng putih.

Kemudian ia mengambil lima kelereng sekaligus. Berepa peluang bahwa dari lima buah kelereng yang terambil itu, tiga buah di antaranya berwarna kuning?

Penyelesaian:

Misalnya A : Peristiwa bahwa lima buah kelereng yang terambil itu, tiga buah diantaranya berwarna kuning.

Banyak susunan kelereng kuning yang terambil =$\binom{7}{3}$ cara = 35 cara.

Banyak susunan kelereng putih yang terambil = $\binom{8}{2}$ cara = 28 cara.

Jadi: $n(A)$ =Banyak susunan lma buah kelereng yang terambil, dengan tiga buah diantaranya berwarna kuning

= (35×28) cara

$n(A)$ = 980 cara

$n(S)$ = Banyak susunan lima buah kelereng yang terambil secara keseluruhan

= $\binom{15}{5}$ cara

$n(S)$ = 3.003 cara

Sehingga: $P(A) = \frac{980}{3.003}$.

BAB II
DISTRIBUSI SATU PEUBAH ACAK

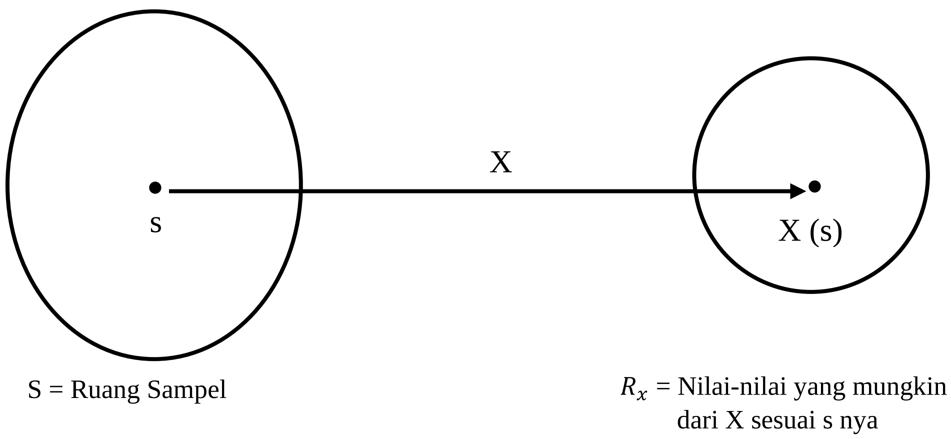
2.1 MACAM-MACAM PEUBAH ACAK

Berikut ini akan dijelaskan defenisi secara umum dari peubah acak.

Definisi 2.1 Peubah acak

Misalnya E adalah eksperimen dengan ruang sampelnya S. Sebuah fungsi X yang menetapkan setiap anggota $s \in S$ *dengan sebuah bilangan real X(s) dinamakan peubah acak.*

Berdasarkan defenisi diatas, ada dua buah himpunan yang melibatkan peubah acak, yaitu ruang sampel *S* yang berisi anggotanya (titik sampel) *s* dan *R*, berupa nilai-nilai yang mungkin dari *X* yang berkaitan dengan anggota *S*-nya. Pendefenisian peubah acak bisa dijelaskan dalam gambar sebagai berikut.



Gambar 2.1. X disebut Peubah Acak

Contoh 2.1

Misalnya sandy melakukan pelemparan dua buah mata uang logam Rp 100 yang seimbang secara sekaligus.

Jika X menunjukkan banyak Huruf " BANK INDONESIA" yang terjadi, maka apakah X merupakan peubah acak?

Penyelesaian :

Ruang sampelnya adalah:

$$S = \{HH, GH, HG, GG\}$$

dengan : G = Gambar " KARAPAN SAPI"

H = Huruf "BANK INDONESIA"

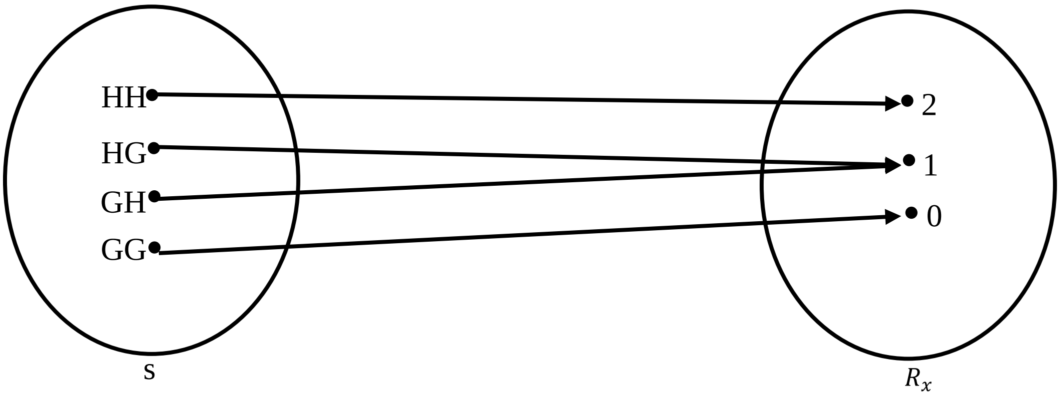
Untuk S_1 = *HH*, maka $X(S_1)$ = X (*HH*) = 2

Untuk S_1 = *GH*, maka $X(S_2)$ = X (*GH*) = 1

Untuk S_1 = *HG*, maka $X(S_3)$ = X (*HG*) = 1

Untuk S_1 = *GG*, maka $X(S_4)$ = X (*GG*) = 0

Jadi nilai-nilai yang mungkin dari X, R_x ={0, 1, 2}.



Karena X memenuhi syarat-syarat sebuah fungsi, maka X disebut peubah acak.

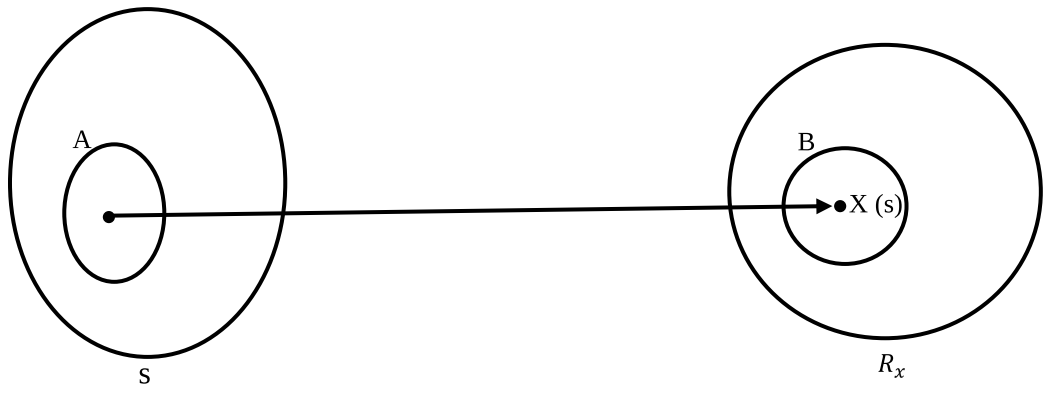
Apabila kita bisa memperoleh sebuah peristiwa berkenaan dengan ruang sampel S dan sebuah peristiwa berkenaan dengan peubah acak X (yaitu himpunan bagian dari ruang hasil R_x), maka dua peristiwa itu akan ekivalen. Hal ini bisa dilihat dalam definisi 2.2.

Definisi 2.2 : Peristiwa Yang Ekivalen

Misalnya E adalah sebuah eksperimen dengan ruang sampelnya S. X adalah peubah acak X yang didefenisikan pada S dengan R_x adalah ruang hasilnya dan B adalah peristiwa yang berkenan dengan R_x artinya B $\subset R_x$.

Jika peristiwa A didefenisikan sebagai: $A = \{s \in S \mid X(s) \in B\}$, artinya A berisi semua hasil dalam S dengan $X(s) \in B\}$, maka A dan B dikatakan dua peristiwa yang ekivalen.

Dua peristiwa yang yang ekivalen bisa digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.2. *A* dan *B* adalah Dua Peristiwa yang Ekivalen

Pemahaman dan peristiwa yang ekivalen diperjelas melalui contoh 2.2.

Contoh 2.2

Ketika kita mengundi dua mata uang logam Rp 100 yang seimbang secara sekaligus, maka ruang sampelnya : $S = \{HH, GH, HG, GG\}$.

Jika *X* menunjukkan banyak *G* yang terjadi, maka nilai-nilai yang mungkin dari *X* adalah $R_x = \{\ 0, 1, 2\ \}$.

Dua peristiwa *A* dan *B* yang ekivalen ada tiga buah, yaitu :

1. Ruang peristiwa dari *B* : *B* = {0}.

   Karena X(HH) = 0 jika dan hanya jika *X*(*s*) = 0, maka *s* = (*HH*) dan ia merupakan ruang peristiwa dari peristiwa lainnya, yaitu *A*. Jadi *A* = {*HH*}. Akibatnya, *A* dan *B* merupakan dua buah peristiwa yang ekivalen.

2. Ruang peristiwa dari *B* : *B* = {1}.

   Karena X(*HG*) = *X*(*GH*) = 1 jika dan hanya jika *X*(*s*) = 1, maka *s* = (*HG*) atau *s* = (*GH*) dan ia merupakan peristiwa dari peristiwa lainnya, yaitu *A*. Jadi *A* = {*HG*, *GH*}. Akibatnya, *A* dan *B* merupakan dua buah peristiwa yang ekivalen.

3. Ruang peristiwa dari *B* : *B* = {2}.

   Karena X(*GG*) = 2 jika dan hanya jika *X*(*s*) = 2, maka *s* = (*GG*) dan ia merupakan ruang peristiwa dari peristiwa lainnya, yaitu *A*. Jadi *A* = {*GG*}. Akibatnya, A dan B merupakan dua buah peristiwa yang ekivalen.

Kita sudah mengetahui bahwa peristiwa *A* yang berkaitan dengan ruang sampel *S* ekivalen dengan peristiwa *B* yang berkaitan dengan nilai-nilai yang mungkin dari peubah acak *X*. Akibatnya, peluang dari kedua peristiwa itu akan sama, yaitu $P(A) = P(B)$.

Hal ini dapat diihat dalam definisi 2.3.

Definisi 2.3 Peluang Dua Peristiwa Yang Ekivalen

Jika B adalah sebuah peristiwa dalam ruang hasil R_x, *maka P(B) didefenisikan sebagai : P(B) = P(A), dengan A=* $\{s \epsilon S \,|X(s) \epsilon B\}$.

Pemahaman perhitungan peluang dari kedua peristiwa yang ekivales dierjelas melalui Contoh 2.3.

Contoh 2.3 :

Dalam pengundian dua mata uang logam Rp 100 yang seimbang, maka $P(HG) = P(GH) = P(GG) = P(HH) = \frac{1}{4}$.

Hitung $P\ (X = 0)$, $P\ (X = 1)$, dan $P\ (X = 2)$.

Penyelesaian :

a. Karena $X = 0$ ekivalen denga peristiwa yang ruang peristiwanya { *HH* } dan $P(HH) = \frac{1}{4}$, maka $P\ (X = 0) = P(HH) = \frac{1}{4}$.

b. Karena $X = 1$ ekivalen denga peristiwa yang ruang peristiwanya { *HG* } atau{ *GH* }, dan : $P(GH$ atau $GH) = P(HG) + P(GH) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

   $P(GH$ atau $GH) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

   maka $P\ (X = 1) = P(GH$ atau $GH) = \frac{1}{2}$.

c. Karena $X = 2$ ekivalen denga peristiwa yang ruang peristiwanya { *GG* } dan $P(GG) = \frac{1}{4}$, maka $P\ (X = 2) = P(GG) = \frac{1}{4}$.

   Dalam statistika ada dua macam peubah acak, yaitu peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu. Pada pengertian kedua macam peubah acak tersebut bisa dilihat dalam defenisi 2.4 dan 2.5.

Definisi 2.4 : Peubah Acak Diskrit

Misalnya X adalah peubah acak. Jika banyak nilai-nilai yang mungin dari X (yaitu ruang hasil R_x) berhingga atau tak terhingga tapi dapat dihitung, maka X dinamakan peubah acak diskrit.

Nilai-nilai yang mungkin dari *X* bisa ditulis sebagai : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$.

Pemahaman pengertian peubah acak diskrit diperjelas melalui Contoh berikut.

Lihat kembali contoh 2.2.

Nilai-nilai yang mungkin dari X adalah $R_x = \{0, 1, 2\}$.

Karena banyaknya anggota R_x berhingga, maka X termasuk ke dalam peubah acak diskrit.

Contoh 2.4

Misalnya sandi mengundi sebuah dadu yang seimbang.

Jika peubah acak *X* menunjukkan banyak pengulangan percobaan sampai mata dadu 5 muncul pertama kali, maka nilai-nilai yang mungkin dari *X* adalah : $R_x = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Karena banyak anggota dari R_x tak berhingga tapi dapat dihitung, maka *X* termasuk kedalam peubah acak diskrit.

Defenisi 2.5 : Peubah Acak Kontinu

Misalnya X adalah peubah acak. Jika nilai-nilai yang mungkin dari X (yaitu ruang hasil R_x) merupakan sebuah interval pada garis bilangan real, maka X dinamakan peubah acak kontinu.

Pemahaman pengertian peubah acak kontinu diperjelas melalui Contoh 2.5.

Contoh 2.5 :

Misalnya sebuah universitas mempunyai mahasiswa berjumlah 25.000 orang dan para mahasiswa itu diberi nomor induk mahasiswa mulai dari 00001 sampai 25000. Kemudian seorang mahasiswa dipilih secara acak dan ia diukur berat badannya. Dalam hal ini, ruang sampelnya adalah :

$$S = \{\, s: s = 00001, 00002, 00003, \dots, 25000 \,\}$$

Misalnya X menunjukkan berat badan dari mahasiswa yang terpilih, maka ia bisa ditulis sebagai: $X(s)$, dengan $s \in S$.

Kita mengansumsikan bahwa tidak ada mahasiswa di universitas tersebut yang mempunyai berat badan kurang dari 20 kg, sehingga ruang hasil dari X adalah :

$$R_x = \{\, x : 20 \leq x \leq 175 \,\}$$

Karena R_x merupakan sebuah interval, maka X termasuk kedalam peubah acak kontinu.

2.2 DISTRIBUSI PELUANG

Dalam sebuah peubah acak diskrit, nilai-nilai yang mungkin dari peubah acaknya merupakan bilangan bulat. Nilai peluang dari peubah acak yang berharga tertentu diperoleh berdasarkan titik-titik sampelnya. Apabila nilai peluang dari peubah acak tersebut memenuhi persyaratan tertentu, maka nilai peluang tersebut dinamakan **fungsi peluang**.

Berikut ini kita akan menjelaskan definisi fungsi peluang.

Definisi 2.6 : Fungsi Peluang

*Jika X adalah peubah acak diskrit, maka p(x) = P(X = x) untuk setiap x dalam range X dinamakan **fungsi peluang** dari X. Nilai fungsi peluang dari X, yaitu p(x), harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.*

i. $p(x) \geq 0$

ii. $\sum_x p(x) = 1$

Adapun, kumpulan pasangan yang diurutkan {*x*, *p(x)*} dinamakan ***distribusi peluang*** dari *X*.

Bentuk umum dari fungsi peluang ada dua kemungkinan, yaitu berupa konstanta dan berupa fungsi dari nilai peubah acak.

- Fungsi peluang berupa konstanta yang terdiri atas satu nilai atau lebih dari satu nilai.

  Fungsi peluang berupa konstanta yang terdiri atas satu nilai, artinya untuk setiap nilai peubah acak yang diberikan, maka nilai fungsi peluangnya sama. Misalnya fungsi peluang dari peubah acak *Y* yang berbentuk :

$$p(y) = \frac{1}{4}; y = -1, 0, 1, 2$$

  Fungsi peluang berupa konstanta yang terdiri atas lebih dari satu nilai, artinya untuk setiap nilai peubah acak yang diberikan masing-masing mempunyai nilai fungsi peluangnya.

$p(x) = \frac{1}{3}; x = 2$

$= \frac{1}{3}; x = 3$

$= \frac{1}{4}; x = 4$

$= \frac{1}{12}; x = 5$

- Fungsi peluang berupa fungsi dari nilai peubah acak (*FPBF*) sebenarnya sama dengan fungsi peluang berupa konstanta yang terdiri atas lebih dari satu nilai (*FPBK*), hanya bedanya *FPBF* ditulis secara umum dan berlaku untuk nilai peubah acak tertentu sedangkan *FPBK* ditulis satu per satu yang berlaku untuk masing-masing nilai peubah acaknya.

  Misalnya fungsi peluang dari peubah acak *X* berbentuk:

$$p(x) = \frac{x}{15}; x = 1, 2, 3, 4, 5$$

Pemahaman distribusi peluang dan fungsi peluang dari sebuah peubah acak diperjelas melalui Contoh 2.6.

Contoh 2.6

Misalnya Farah mengundi dua buah mata uang logam Rp 100 yang seimbang secara sekaligus. Jika peubah acak *X* menunjukkan banyak huruf "BANK INDONESIA" yang muncul, maka tentukan peluang distribusi dari *X*.

Penyelesaian :

Dalam hal ini, kita harus menghitung nilai peubah acak *X*, yaitu *x* dan nilai peluangnya.

Ruang sampelnya : : $S = \{GG, GH, HG, HH\}$.

Karena *X* menyatakan banyak *H* yang muncul, maka :

i. Untuk titi sampel *GG*, bilangan bulat yang sesuai adalah 0, ditulis *X(s)* = X(*GG*) = 0.
ii. Untuk titi sampel *GH*, bilangan bulat yang sesuai adalah 1, ditulis *X(s)* = X(*GH*) = 1.
iii. Untuk titi sampel *HG*, bilangan bulat yang sesuai adalah 1, ditulis *X(s)* = X(*HG*) = 1.
iv. Untuk titi sampel *HH*, bilangan bulat yang sesuai adalah 2, ditulis *X(s)* = X(*HH*) = 2.

Karena mata uang logam Rp 100 yang digunakan dalam pengundian itu seimbang, maka peluang masing-masing titik sampel sama, yaitu $\frac{1}{4}$. Peluang setiap nilai peubah acaknya dalah sebagai berikut.

i. $P(X = 0) = P(\{GG\}) = \frac{1}{4}$

ii. $P(X = 1) = P(\{GH\}$ atau $\{HG\})$

$$= P(\{GH\}) + P(\{HG\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

iii. $P(X = 2) = P(\{HH\}) = \frac{1}{4}$

Jadi distribusi peluang dari *X* adalah:

x	0	1	2
p(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Contoh 2.7

Misalnya fungsi peluang dari peubah acak X berbentuk:

p(x) = $\frac{1}{5}$ (kx+1) ; x = 0, 1, 2, 3.

= 0 ; x lainnya.

Tentukanlah k.

Penyelesaian

$\sum_x p(x) = 1$

$\sum_{x=0}^{3} \left(\frac{1}{5}\right)(kx + 1) = 1$

$\frac{1}{5}$ {1+ (k + 1) + (2k + 1) + (3k + 1)} =1

6k + 4 = 5

6k = 1

k = $\frac{1}{6}$.

Apabila kita akan menggambarkan grafik dari fungsi peluang atau distribusi peluang, maka grafiknya dapat berupa diagram batang atau histogram peluang.

Latihan : Gambarkanlah diagram batang dan histogram dari peluang dari contoh 2.6.

Dalam peubah acak kontinu, fungsi yang memenuhi sifat-sifat tertentu dinamakan **fungsi densitas peluang** atau **fungsi densitas** saja.

Definisi 2.7 : Fungsi Densitas

Misalnya X adalah peubah acak kontinu yang didefinisikan dalam himpunan bilangan real.

Sebuah fungsi disebut densitas dari X, jika nilai-nilainya, yaitu f(x), memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

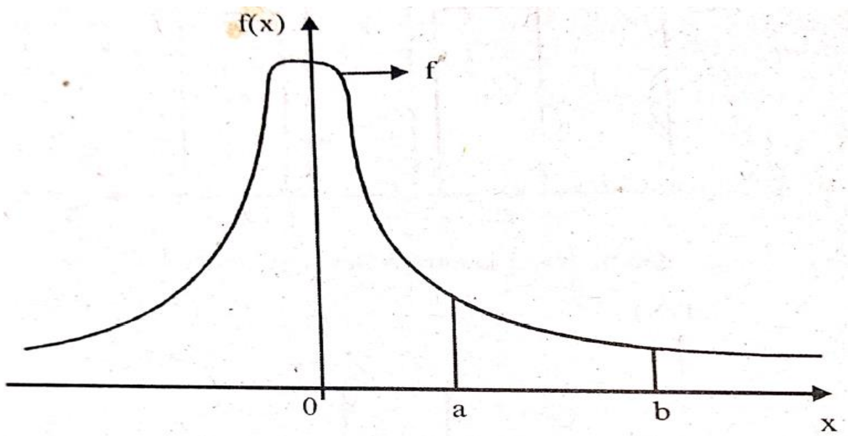
i. $f(x) \geq 0$, *untuk* $x \in (-\infty, \infty)$

ii. $\int_{(-\infty)}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

iii. *Untuk setiap a dan b, dengan* $-\infty < a < b < \infty$, *maka :*

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\; dx$$

Sifat (iii) di atas menunjukkan perhitungan peluang dari peubah acak kontinu X yang mempunyai nilai dari *a* sampai *b*.



Gambar 2.3 *P*(*a* ≤ *X* ≤ *b*) = Luas daerah di bawah kurva *f* dari *a* sampai *b*.

Berdasarkan gambar 2.3, *P*(*a* ≤ *X* ≤ *b*) sama dengan luas daerah di bawah kurva *f* dari *a* sampai *b*.

Dalam peubah acak diskrit, peluang dari peubah acak yang berharga lebih dari satu nilai yang membentuk sebuah interval bisa dihitung dengan mudah bergantung pada bentuk intervalnya. Artinya, jika kita menghitung *P*(*a* < *X* < *b*) hasilnya akan berbeda dengan $P(a \le X < b)$, $P(a < X \le b)$ atau $P(a \le X \le b)$. Akan tetapi, perhitungan peluang dari peubah acak kontinu yang harganya membentuk sebuah interval apa saja hasilnya akan sama. Hal ini dapat dilihat dalam Dalil 2.1.

Dalil 2.1: Peluang Peubah Acak Kontinu Berbentuk Interval

Jika X adalah peubah acak kontinu serta a dan b adalah dua konstanta real, dengan $a < b$, maka :

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b).$$

Grafik dari fungsidensitas berupa sebuah kurva atau sebuah garis atau bahkan kombinasi keduanya, yang penggambarannya disesuaikan dengan bentuk fungsi densitasnya.

Pemahaman perhitungan peluang dari peubah acak kontinu yang berharga tertentu sampai penggambaran grafiknya diperjelas melaui contoh berikut.

Contoh 2.8

Diketahui $f(x) = kx^2$; $0 < x < 2$

$\qquad\qquad = 0$; x lainnya

a. Tentukanlah nilai k agar f(x) merupakan fungsi densitas dari peubah acak X.
b. Hitung $P(1 < X < 2)$
c. Gambarkanlah grafik dari fungsi densitasnya

Penyelesaian

a. Berdasarkan sifat kedua dari fungsi densitas, maka:

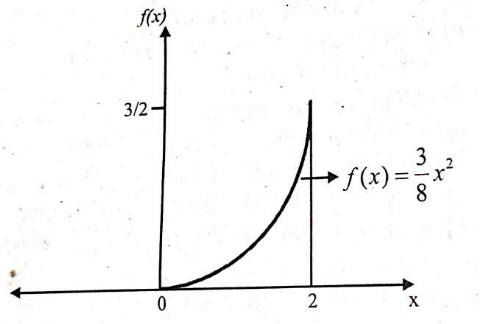
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$\int_0^2 kx^2\, dx = 1$$

$$k = \frac{3}{8}$$

b. $P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{3}{8}x^2\, dx = \ldots\ldots = \frac{7}{8}$.

c. Grafik fungsi densitasnya



Gambar 2.4 Grafik Fungsi densitas Contoh 2.8 .

Fungsi densitas dari sebuah peubah acak kontinu bisa mempunyai beberapa nilai bergantung pada nilai peubah acaknya. Jika setiap nilai fungsi densitas itu merupakan fungsi dari konstanta yang belum diketahui, maka perhitungan dari konstanta itu tidak dilakukan terhadap masing-masing interval nilai peubah acaknya melainkan terhadap semua interval nilai peubah acaknya. Uraian in diperjelas dalam contoh 2.9 berikut.

Contoh 2.9

Misalnya fungsi densitas dari peubah acak X berbentuk:

$g(x) = kx \quad ; 0 \le x \le 1$

$\quad = k \quad ; 1 \le x \le 2$

$\quad = -kx + 3k \quad ; 0 \le x \le 1$

$\quad = 0 \quad ;\ x$ lainnya

a. Hitunglah nilai k

b. Gambarkanlah grafik dari $g(x)$

Penyelesaian

Dalam hal ini, perhitungan nilai k tidak dilakukan untuk setiap interval nilai x melainkan terhadap nilai x dari 0 sampai 3. Adapun batas-batas pengintegralannya diisi dengan setiap interval nilai x.

a. Berdasarkan sifat kedua dari fungsi densitas, maka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)\, dx + \int_{0}^{1} g(x)\, dx + \int_{1}^{2} g(x)\, dx + \int_{2}^{3} g(x)\, dx + \int_{3}^{\infty} g(x)\, dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} kx\, dx + \int_{1}^{2} k\, dx + \int_{2}^{3} (-kx + 3k)\, dx + \int_{3}^{\infty} 0\, dx = 1$$

...... dst

$\frac{1}{2}k + k - \frac{5}{2}k + 3k = 1$

$2k = 1$

$k = \frac{1}{2}$.

Jadi fungsi densitas dari *X* berbentuk :

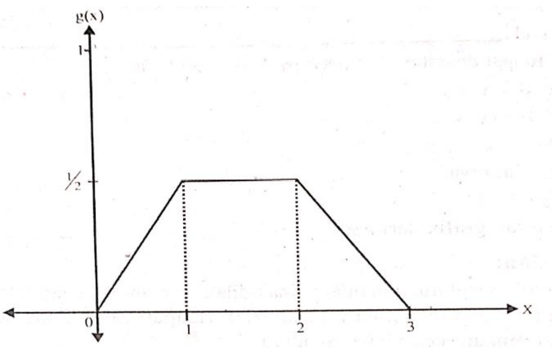
$g(x) = \frac{1}{2}x$; $0 \leq x \leq 1$

$= \frac{1}{2}$; $1 \leq x \leq 2$

$= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; $0 \leq x \leq 1$

$= 0$; x lainnya

b. Grafik dari g(x) bisa dilihat dalam Gambar 2.5



Gambar 2.5 Grafik Fungsi Densitas Contoh 2.9

2.3 FUNGSI DISTRIBUSI

Apabila kita mempunyai distribusi peluang dari sebuah peubah acak diskrit, maka kita bisa menghitung peluang daripeubah acak tersebut yang berharga tertentu. Nilai peluang dari peubah acak tersebut bisa mempunyai beberapa kemungkinan, yaitu:

a. $P(X < a)$

b. $P(a < X < b)$

c. $P(a \leq X \leq b)$

d. $P(X > b)$

e. $P(X \geq b)$

f. $P(X \leq a)$

g. $P(a \leq X < b)$

h. $P(a < X \leq b)$

dengan *a* dan *b* adalah dua bentuk konstanta.

Jika kita memperhatikan bentuk $P(X \leq a)$, maka bentuk umumnya ditulis $P(X \leq x)$. Dalam statistika matematis, bentuk $P(X \leq x)$ dinamakan ***fungsi distribusi kumulatif*** dan ***fungsi distribusi*** saja.

Definisi 2.8 Fungsi Distribusi Kumulatif

Misalnya x adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Kita mendefinisan F sebagai funngsi distribusi kumulatif dari peubah acak X, dengan :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Definisi 2.9 : Fungsi Distribusi Kumulatif Diskrit

Misalnya Xadlah peubah acak diskrit, maka fungsi distribusi kumulatif dari X berbentuk:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \leq x} p(t)$$

dengan p(t) adalah fungsi peluang dari X di t.

Pada pembahasan selanjutnya, fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak diskrit akan dinyatakan sebagai fungsi ditribusi saja.

Jika peubah acak X mempunyai nilai-nilai yang banyaknya berhingga, yaitu x_1, x_2, ... , x_n dan masing-masing mempunyai peluangnya $p(x_1)$, $p(x_2)$, ... , $p(x_n)$, maka fungsi distribusinya ditentukan sebagai berikut:

$F(x) = 0$; $x < x_1$

$= p(x_1)$; $x_1 \leq x < x_2$

$= p(x_1) + p(x_2)$; $x_2 \leq x < x_3$

$= p(x_1) + p(x_2) + ... + p(x_n) = 1$; $x_n \leq x$

Jika kita memperhatikan bentuk fungsi distribusi di atas, maka nilainya berupa konstanta semua untuk setiap interval nilai x yang diberikan. Seperti halnya fungsi peluang atau distribusi peluang dan fungsi densitas, fungsi distribusi juga dapat digambarkan grafiknya. Dalam hal ini, grafik fungsi distribusi dari peubah acak diskrit berupa ***fungsi tangga***.

Penentuan fungsi distribusi dan gambarnya dari peubah acak diskrit diperjelas melalui contoh 2.10.

Contoh 2.10:

Apabila kita mengundi dua mata uang logam Rp 100 yang seimbang secara sekaligus, maka distribusi peluangnya berbentuk :

x	0	1	2
P(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

dengan X menunjukkan Huruf “BANK INDONESIA”.

a. Tentukan fungsi distribusi dari X.

b. Gambarkan grafik fungsi ditribusinya

Penyelesaian:

Untuk $x < 0$

$F(x) = 0$

Untuk $0 \leq x < 1$

$F(0) = \sum_{t \leq 0} p(t)$

$= p(0)$

$F(0) = \frac{1}{4}$

Untuk $1 \leq x < 2$

$F(1) = \sum_{t \leq 1} p(t)$

$= p(0) + p(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$F(1) = \frac{3}{4}$

Untuk $2 \leq x$

$F(2) = \sum_{t \leq 2} p(t)$

$= p(0) + p(1) + p(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$F(2) = 1$

Jadi fungsi distribusi dari X berbentuk :

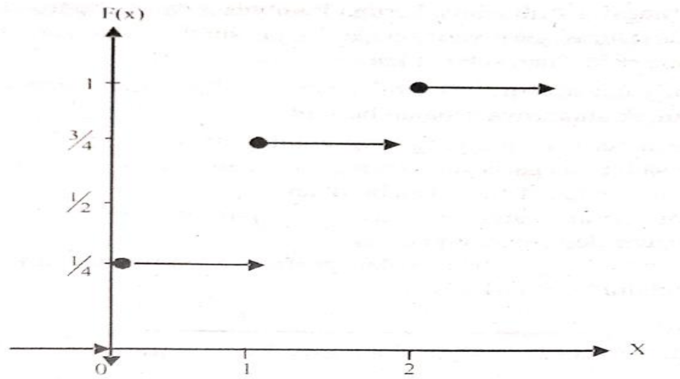
$F(x) = 0 \quad ; x < 0$

$= \frac{1}{4} \quad ; 0 \leq x < 1$

$= \frac{3}{4} \quad ; 1 \leq x < 2$

$=1 \quad ; 2 \leq x.$

b. Grafik fungsi distribusinya dapat dilihat dalam Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Grafik Fungsi Distribusi diskrit

Hal yang perlu diperhatikan dalam fungsi distribusi untuk peubah acak diskrit adalah penulisan notasinya. Notasi untuk fungsi distribusi biasa ditulis dengan huruf besar F, G, H atau lainnya yang diikuti dengan nilai peubah acaknya.

Definisi 2.10 : Fungsi Distribusi Kumulatif Kontinu

Misalnya X adalah peubah acak kontinu, maka fungsi distribusi kumulatif dari X berbentuk :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$$

dengan f(t) adalahnilai fungsi densitas dari X dan t.

Pada pembahasan selanjutnya, fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak kontinu akan dinyatakan sebagai fungsi ditribusi saja. Nilai fungsi distribusi untuk peubah acak kontinu biasanya berupa konstanta dan fungsi. Grafik fungsi distribusinya berupa kombinasi dari beberapa kemungkinan berikut ini: garis lurus, garis yang sejajar dengan sumbu datar, garis yang berimpit dengan sumbu datar, dan sebuah kurva.

Penentuan fungsi distribusi untuk peubah acak kontinu diperjelas melalui Contoh 2.11.

Contoh 2.11 :

Misalnya fungsi densitas dari peubah acak *X* berbentuk :

$$f(x) = \left(\frac{3}{8}\right) x^2 \;; 0 < x < 2$$
$$= 0 \qquad ; x \text{ lainnya.}$$

a. Tentukan fungsi distribusi $F(x)$.

b. Gambarlah grafik dari $F(x)$

Penyelesaian :

a. **Untuk $\boldsymbol{x < 0}$**

$F(x) = 0$

Untuk $\boldsymbol{0 \leq x < 2}$

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{x} f(t)\, dt$

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \left(\frac{3}{8}\right) t^2\, dt$

$= 0 + \left(\frac{1}{8}\right) (t^3)]_{t=0}^{2}$

$F(x) = \left(\frac{1}{8}\right) x^3$

Untuk $2 \leq x$

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{2} f(t)\, dt + \int_{2}^{x} f(t)\, dt$

$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{2} \left(\frac{3}{8}\right) t^2\, dt + \int_{2}^{x} 0\, dt$

$= 0 + \left(\frac{1}{8}\right) (t^3)]_{t=0}^{2} + 0$

$F(x) = 1$

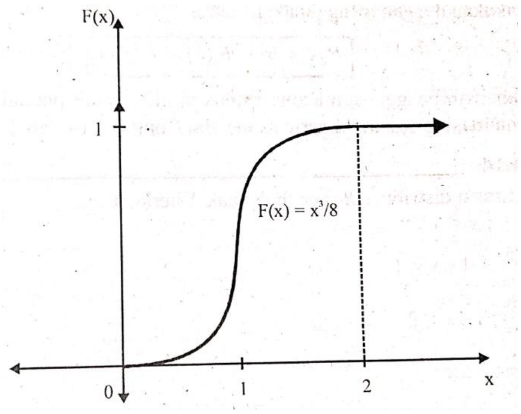
Jadi fungsi distribusinya berbentuk :

$F(x) = 0 \qquad ; x < 0$

$\quad = \left(\frac{1}{8}\right) x^3 \quad ; 0 \leq x < 2$

$\quad = 1 \qquad ; 2 \leq x$.

b. Grafiknya bisa dilihat dalam Gambar 2.7.



Gambar 2.7 Grafik Fungsi Distribusi Contoh 2.11

Soal Latihan

1. Sebuah kotak berisi empat bola pimpong yang bernomor1, 2, 3, dan 4. Kemudian dua bola pimpong diambil sekaligus. Jika Y menunjukkan jumlah angka dari dua bola pimpong yang terambil, maka :

   a. Tentukanlah distribusi peluang dari Y.

   b. Hitung $P(Y \leq 5)$.

   c. Gambarkan grafik distribusi peluangnya.

   d. Tentukanlah fungsi distribusinya

2. Misalkan distribusi peluang dari X berbentuk:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	k	3k	3k	k^2	$2k^2$	$6k^2+k$

   a. Tentukan nilai konstanta k.

   b. Hitung $P(X < 4)$, $P(X \geq 4)$, dan $P(0 < X < 4)$.

   c. Tentukan nilai m minimum sedemikian sehingga $P(X \leq m) > 0{,}5$.

3. Misalkan fungsi densitas dari X berbentuk:

$$f(x) = cx^2 \quad ; \quad 1 < x < 2$$
$$= 0 \quad ; \quad x \text{ lainnya}$$

   a. Tentukan nilai konstanta c

   b. Hitung $P(0 < X < 1{,}5)$

   c. Gambarlah grafik fungsi densitasnya

   d. Tentukanlah fungsi distribusinya

BAB III
DISTRIBUSI DUA PEUBAH ACAK

3.1 DISTRIBUSI GABUNGAN

Pembahasan macam-macam distribusi yang berkaitan dengan dua peubah acak selalu didasarkan pada dua peubah acak berdimensi dua.

Definisi 3.1 : Peubah Acak Berdimensi Dua

Jika S merupakan ruang sampel dari sebuah eksperimen, maka pasangan (X, Y) dinamakan peubah acak berdimensi dua, jika X dan Y masing-masing menghubungkan sebuah bilangan real dengan setiap anggota S.

Dalam statistika ada dua macam peubah acak berdimensi dua, yaitu peubah acak diskrit berdimensi dua dan peubah acak kontinu berdimensi dua. Berikut ini akan dijelaskan definisi kedua macam peubah acak berdimensi dua tersebut disertai contohnya.

Definisi 3.2 : Peubah Acak Diskrit Berdimensi Dua

(X, Y) disebut peubah acak diskrit berdimensi dua, jika banyak nilai-nilai yang mungkin dari (X, Y) salah satunya berhingga atau tidak berhingga tapi dapat dihitung.

Pemahaman pengertianpeubah acak diskrit berdimensi dua diperjelas melalui Contoh 3.1.

Contoh 3.1

Sebuah kotak berisi tiga bola pingpong bernomor 1, 2, dan 3. Kemudian kita mengambil dua bola pingpong secara acak dalam pengambilan. Misalnya peubah acak *X* menyatakan bilangan pada pengambilan bola pingpong pertama dan peubah acak *Y* menyatakan bilangan pada pengambilan bola pingpong kedua.

Pada pengambilan bola pingpong pertama, bola yang akan diambil ada tiga kemungkinan, yaitu bolapingpong bernomor 1, 2, atau 3. Jadi nilai-nilai yang mungkin dari *X* adalah {1, 2, 3}

Pada pengambilan bola pingpong kedua, karena bola pingpong pertama yang terambil dikembalikan kembali kedalam kotak, maka bola pingpong yang akan diambil juga ada tiga kemungkinan, yaitu bola pingpong bernomor 1, 2, atau 3. Jadi nila-nilai yang mungkin dari Y adalah $\{1, 2, 3\}$.

Karena kedua peubah acak X dan Y mempunyai banyak nilai-nilai yang mungkinnya berhingga, maka (X, Y) termasuk peubah acak diskrit berdimensi dua.

Definisi 3.3 : Peubah Acak Kontinu Berdimensi Dua

(X,Y) disebut peubah acak kontinu berdimensi dua, jika nilai-nilai yang mungkn dari X dan Y masing-masing berbentuk sebuah interval.

Pemahaman pegertian peubah acak diskrit berdimensi dua diperjelas melalui Contoh 3.2.

Contoh 3.2

Dalam tunbuh seseorang yang sehat berusia 20 sampai 29 tahun, kadar kalsium dalam darahnya, yaitu X , biasanya antara 8,5 dan 10,5 mg/dl sedangkan kadar kolestrolnya, yaitu Y, biasanya 120 dan 240 mg/dl.

Karena peubah acak X dan Y masing-masing dinyatakan dalam interval, yaitu $8{,}5 < x < 10{,}5$ dan $120 < y < 240$, maka (X, Y) merupakan peubah acak kontinu berdimensi dua.

Dalam peubah acak diskrit, perhitungan peluang dari peubah acak X dan Y yang masing-masing berharga tertentu, memerlukan sebuah fungsi yang dinamakan *fungsi peluang gabungan.*

Definisi 3.4 : Fungsi Peluang Gabungan

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, maka fungsi yang dinyatakan dengan $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ *untuk setiap pasangan nilai (x, y) dalam daerah hasil dari X dan Y, dinamakan fungsi peluanng gabungan.*

Dalil 3.1 : Sifat – Sifat Fungsi Peluang Gabungan

Sebuah fungsi dengan dua peubah acak dapat digunakan sebagai distribusi peluang gabungan dari pasangan peubah acak diskrit X dan Y, jika dan hanya jika nilai-nilainya, yaitu p(x, y), memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. $p(x, y) \geq 0$, *untuk setiap pasangan nilai (x, y) dalam bentuk daerah asalnya.*
2. $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1$

Apabila X mempunyai nilai-nilai $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ dan Y mempunyai nila-nilai $y_1, y_2, y, \dots, y_m$; maka peluang terjadinya peristiwa $X = x_j$dan $Y = y_k$ dinotasikan dengan :

$$P\left(X = x_j, Y = y_k\right) = p(x_j, y_k)$$

Contoh 3.3 :

Fungsi peluang gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk :

$p(x, y) = c(x + 2y); x = 0,1,2,3$ dan $y = 0,1,2,3$

a. Tentukan nilai kobstanta c

b. Hitung $P(X = 2, Y = 1)$

c. Hitung $P(X \geq 1, Y \leq 2)$

Penyelesaian :

a. Berdasarkan sifat (2), maka :

$\sum_{x=0}^{3} \sum_{y=0}^{3} p(x, y) = 1$

$p(0,0) + p(0,1) + p(0,2) + p(0,3) + p(1,0) + p(1,1) + p(1,2) + p(1,3) + p(2,0) + p(2,1) + p(2,2) + p(2,3) + p(3,0) + p(3,1) + p(3,2) + p(3,3) = 1$

$0 + 2c + 4c + 6c + c + 3c + 5c + 7c + 2c + 4c + 6c + 8c + 3c + 5c + 7c + 9c = 1$

$72c = 1$

$c = \frac{1}{72}$

b. $P(X = 2, Y = 1) = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$

c. $P(X \geq 1, Y \leq 2) = (\frac{1}{72})(x + 2y)$

$$= \left(\frac{1}{72}\right)(1 + 3 + 5 + 2 + 4 + 6 + 3 + 5 + 7)$$

$P(X \geq 1, Y \leq 2) = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$

Dalam peubah acak kontinu, perhitungan peluang dari dua peubah acak yang masing-masing berharga tertentu, memerlukan sebuah fungsi yang dinamakan *fungsi densitas gabungan.*

Berikut ini kan dijelaskan definisi fungsi densitas gabungan disertai sifat-sifatnya.

Definisi 3.5 : Fungsi Densitas Gabungan

Sebuah fungsi yang melibatkan dua peubah acak X dan Y dengan nilai-nilainya dinyatakan dalam bilanngan-xy, dinamakan fungsi densitas gabungan, jika dan hanya jika :

$$P[\{X,Y\} \epsilon A] = \iint_A f(x,y)dx\, dy$$

Dengan A terletak dalam bilangan-xy.

Dalil 3.2 : Sifat-Sifat Fungsi Densitas Gabungan

Sebuah fungsi dari dua peubah acak kontinu X dan Y dapat digunakan sebagai fungsi densitas gabungan, jika nilai-nilainya,

1. $f(x,y) \geq 0, \quad untuk\ -\infty < x,y < \infty$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\, dy = 1$

Penggunaan rumus diatas diperjelas melalui Contoh 3.4.

Contoh 3.4 :

Misalnya fungsi densitas gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$f(x,y) = cxy\ ; 0 < x < 3, \qquad 1 < y < 4$$
$$= 0\ ;\ \ x,y \quad \text{lainnya.}$$

a. Tentukan nilai konstanta c.

b. Hitung $P[(X,Y)\epsilon\ A]$, dengan *A* adalah daerah $\{(x,y); 0 < x < 2,\ 2 < y < 3\}$

Penyelesaian :

a. Berdasarkan sifat (2), maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\, dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1} \int_{-\infty}^{0} f(x,y)dx\, dy + \int_{1}^{4} \int_{0}^{3} f(x,y)dx\, dy = 1 + \int_{4}^{\infty} \int_{3}^{\infty} f(x,y)dx\, dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{1} \int_{-\infty}^{0} 0\, dx\, dy + \int_{1}^{4} \int_{0}^{3} cxy\, dx\, dy + \int_{4}^{\infty} \int_{3}^{\infty} 0\, dx\, dy = 1$$

$$0 + c. \int_1^4 \left(\frac{1}{4}\right) x^2 y \,]_{x=0}^3 \, dy + 0 = 1$$

$$\frac{9c}{2} . \int_1^4 y \, dy = 1$$

$$\left(\frac{9c}{4}\right) . y]_{y=1}^4 = 1$$

$$(\frac{135}{4})c = 1$$

$$c = \frac{4}{135}$$

b. $P[(X,Y)\epsilon\, A] = P(0 < x < 2,\ 2 < y < 3)$

$$= \int_0^2 \int_2^3 (\frac{4xy}{135}) \, dy \, dx = (\frac{4}{135}) \int_0^2 (\frac{1}{2}) xy^2]_{y=2}^3 \, dx$$

$$= (\frac{2}{27}) \int_0^2 x \, dx$$

$$= (\frac{1}{27}) x^2 \,]_{x=0}^2$$

$$P[(X,Y)\epsilon\, A] = \frac{4}{27}.$$

3.2 DISRIBUSI MARGINAL

Apabila kita mempunyai distribusi gabungan dari dua peubah acak *X* dan *Y* (bisa diskrit semua atau kontinu semua), maka kita dapat menentukan distribusi untuk masing-masing peubah acak. Jadi kita dapat menentukan distribusi dari peubah acak *X* dan distribusi peubah acak *Y*. Distribusi yang diperoleh dengan cara demikian dinamakan *distribusi marginal.*

Definisi 3.6 : Fungsi Peluang Marginal

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit dan p(x, y) adlah nilai dari fungsi peluang gabungannya di (x, y), maka fungsi yang dirumuskan dengan:

$$p_1(x) = \sum_y p(x,y)$$

untuk setiap x dalam daerah hasil X dinamakan fungsi peluang marginal dari X. Adapun fungsi yang dirumuskan dengan:

$$p_2(y) = \sum_x p(x,y)$$

untuk setiap y dalam daerah hasil Y dinamakan fungsi peluang marginal dari Y.

Karena $p_1(x)$ dan $p_2(y)$ masing-masing merupakan fungsi peluang, maka :

a. $\sum_x p_1(x) = 1$

b. $\sum_y p_2(y) = 1$

Pemahaman penentuan fungsi marginaldiperjelas melalui contoh 3.5.

Contoh 3.5

Misalnya fungsi peluang gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$p(x,y) = \left(\frac{1}{72}\right)\ (x+2y); x = 0, 1, 2, 3$$

$$y = 0, 1, 2, 3$$

a. Tentukan fungsi peluang marginal dari *X*.

b. Tentukan fungsi peluang marginal dari *Y*.

Kemudian hasil penyelesaiannya diperiksa kebenarannya.

Penyelesaian :

a. fungsi peluang marginal dari *X* adalah :

$$p_1(x) = \sum_y p(x,y)$$

$$= \sum_{y=0}^{3} \left(\frac{1}{72}\right)\ (x+2y)$$

$$= \left(\frac{1}{72}\right)\ \{(x) + (x+2) + (x+4) + (x+6)\}$$

$$= \left(\frac{1}{72}\right)\ (4x+12)$$

$$= \left(\frac{1}{18}\right)\ (x+3)$$

Jadi : $p_1(x) = \left(\frac{1}{18}\right)\ (x+3); x = 0, 1, 2, 3$

b. fungsi peluang marginal dari *Y* adalah :

$$p_2(y) = \sum_x p(x,y)$$

$$= \sum_{x=0}^{3} \left(\frac{1}{72}\right)\ (x+2y)$$

$$= \left(\frac{1}{72}\right)\ \{(2y) + (1+2y) + (2+2y) + (3+2y)\}$$

$$= \left(\frac{1}{72}\right)\ (6+8y)$$

$$= \left(\frac{1}{36}\right)\ (3+4y)$$

Jadi : $p_2(y) = \left(\frac{1}{36}\right)\ (3+4y); y = 0, 1, 2, 3$

Kita harus memeriksa apakah hasil penyelesaian diatas benar atau salah. Hal ini dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut :

a. Kita harus membuktikan bahwa $\sum_{x=0}^{3}\left(\frac{1}{18}\right)\ (x+3) = 1.$

Bukti :

$\sum_{y=0}^{3}\left(\frac{1}{18}\right)\ (x+3) = \left(\frac{1}{18}\right)\ (3+4+5+6)$

$= \left(\frac{1}{18}\right)(18)$

$\sum_{y=0}^{3}\left(\frac{1}{18}\right)\ (x+3) = 1$

b. Kita harus membuktikan bahwa $\sum_{y=0}^{3}\left(\frac{1}{36}\right)\ (3+4y) = 1.$

Bukti :

$\sum_{y=0}^{3}\left(\frac{1}{36}\right)\ (3+4y) = \left(\frac{1}{36}\right)\ (3+7+11+15)\ = \left(\frac{1}{36}\right)(36)$

$\sum_{y=0}^{3}\left(\frac{1}{36}\right)\ (3+4y) = 1.$

Definisi 3.7 : FUNGSI DENSITAS MARGINAL

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu dan f(x, y) adalah nilai fungsi densitas gabungan di (x, y), maka fungsi yang dirumuskan dengan :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,;\ -\infty < x < \infty$$

dinamakan fungsi densitas marginal dari X.

adapun fungsi yang dirumuskan dengan :

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,;\ -\infty < y < \infty$$

dinamakan fungsi densitas marginal dari Y.

Karena *g(x)* dan *h(y)* masing-masing merupakan fungsi densitas, maka :

1. $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, dy = 1$

Pemahaman penentuan fungsi densitas marginal diperjelas melalui Contoh 3.6.

Contoh 3.6

Misalnya fungsi densitas gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$f(x, y) = \left(\frac{4}{135}\right) xy$; $0 < x < 3, 1 < y < 4$

$= 0$; *x*, *y* lainnya.

a. Tentukan fungsi densitas marginal dari *X*.

b. Tentukan fungsi densitas marginal dari *Y*.

Penyelesaian :

a. Fungsi densitas marginal dari *X* adalah :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{1} f(x, y)\, dy + \int_{1}^{4} f(x, y)\, dy + \int_{4}^{\infty} f(x, y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{1} 0\, dy + \int_{1}^{4} \left(\frac{4}{135}\right) xy\, dy + \int_{4}^{\infty} 0\, dy$$
$$= 0 + \left(\frac{4}{135}\right)\left(\frac{1}{2}\right) xy^2\,]_{y=1}^{4} + 0 \ = \left(\frac{2}{9}\right) x$$

Jadi $g(x) \ = \left(\frac{2}{9}\right) x$; $0 < x < 3$

$= 0$; x lainnya.

b. Fungsi densitas marginal dari *Y* adalah :

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} f(x, y)\, dx + \int_{0}^{3} f(x, y)\, dx + \int_{3}^{\infty} f(x, y)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{3} \left(\frac{4}{135}\right) xy\, dx + \int_{3}^{\infty} 0\, dx$$
$$= 0 + \left(\frac{4}{135}\right)\left(\frac{1}{2}\right) x^2 y\,]_{y=0}^{3} + 0$$
$$= \left(\frac{2}{15}\right) y$$

Jadi $h(y) \ = \left(\frac{2}{15}\right) y$; $1 < y < 4$

$= 0$; y lainnya.

3.3 DISTRIBUSI BERSYARAT

Dalam teori peluang, telah dijelaskan mengenai dua buah peristiwa yang bersyarat. Jika A dan B adalah dua buah peristiwa, maka peluang terjadinya peristiwa B diberikan peristiwa A dirumuskan dengan :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}\ ; 0 < P(A) < 1$$

Jika A adalah peristiwa $X = x$ dan B adalah peristiwa $Y = y$, maka :

$$P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(\ X=x)}$$

$$= \frac{P(X=x, Y=y)}{P(\ X=x)}$$

$$P(y \mid x) = \frac{p(x,y)}{p_1(x)}\ ;\ p_1(x) > 0$$

Dari perumusan diatas, kita dapat mendefiniskan fungsi peluang bersyarat dari sebuah peubah acak diberikan peubah acak lainnya.

Definisi 3.8 : Fungsi Peluang Bersyarat

Jika p(x, y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari dua peubah acak diskrit X dan Y di (x, y) dan $p_2(y)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari Y di y, maka fungsi yang dinyatakan dengan :

$$p(x \mid y) = \frac{P(x, y)}{p_2(y)}\ ; p_2(y) > 0$$

untuk setiap x dalam daerah hasil X, dinamakan fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y.

Jika $p_1(x)$ adalah nilai fungsi peluang marginal dari X di x, maka fungsi yang dirumuskan dengan :

$$p(x \mid y) = \frac{P(x,\ y)}{p_1(x)}\ ;\ p_1(x) > 0$$

untuk setiap y dalam daerah hasil Y, dinamakan fungsi peluang besyarat dari Y diberikan X = x.

Contoh 3.7

Misalnya fungsi peluang gabunngan dari X dan Y berbentuk :

$$p(x, y) = \left(\frac{1}{21}\right)(x + y); x = 1, 2, 3$$

$y = 1, 2$

a. Tentukan $p(x \mid y)$

b. Tentukan $p(y \mid x)$

c. Hitung $p(x \mid y = 1)$

Penyelesaian :

a. $p(x \mid y) = \frac{P(x,y)}{p_2(y)}$

Kita akan menentukan lebih dahulu $p_2(y)$, yang merupakan fungsipeluang marginal dari Y.

$$p_2(y) = \sum_x p(x, y)$$
$$= \sum_{x=1}^{3} \left(\frac{1}{21}\right)(x + y)$$
$$= \left(\frac{1}{21}\right)\{(1 + y) + (2 + y) + (3 + y)\}$$
$$= \left(\frac{1}{21}\right)(6 + 3y)$$

Jadi : $p_2(y) = \left(\frac{1}{21}\right)(6 + 3y)$; $y = 1, 2$

Sehingga : $p(x \mid y) = \frac{x+y}{6+3y}$; $x = 1, 2, 3$

b. $p(y \mid x) = \frac{P(x,y)}{p_1(x)}$

Kita akan menentukan lebih dahulu $p_2(y)$, yang merupakan fungsipeluang marginal dari Y.

$$p_1(x) = \sum_y p(x, y)$$
$$= \sum_{y=1}^{2} \left(\frac{1}{21}\right)(x + y)$$
$$= \left(\frac{1}{21}\right)\{(x + 1) + (x + 2)\}$$
$$= \left(\frac{1}{21}\right)(2x + 3)$$

Jadi : $p_1(x) = \left(\frac{1}{21}\right)(2x + 3)$; $x = 1, 2, 3$.

Sehingga : $p(y \mid x) = \frac{x+y}{2x+3}$; $y = 1, 2$

c. $p(x \mid y = 1) = \left(\frac{1}{9}\right)(x + 1)$

Penentuan distribusi bersyarat dari peubah acak kontinu dapat dilihat dalam definisi 3.9.

Definisi 3.9 : Fungsi Densitas Bersyarat

Jika f(x, y) adalah fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak kontinu X dan Y di (x, y) dan $f_2(y)$ *adalah nilai fungsi densitas marginal dari Y di y, maka fungsi dirumuskan dengan :*

$$g(x\,|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}\ ;\ f_2(x) > 0$$

untuk setiap x dalam daerah hasil X, dinamakan fungsi densitas beryarat dari X diberikan Y = y.

Jika $f_1(x)$ *adalah nilai fungsi densitas marginal dari X di x, maka fungsi yang dirumuskan dengan :*

$$h(y\,|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(y)}\ ;\ f_1(x) > 0$$

untuk setiap y dalam daerah hasil Y, dinamakan fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X= x.

3.4 KEBEBASAN STOKASTIK

Jika kita mempunyai dua buah peubah acak *X* dan *Y*, baik diskrit maupun kontinu, maka kita dapat mengetahui apakah keduapeubah acak itu bebas stokastik atau tidak bebas stokastik.

Penentuan kebebasan stokastik dari dua peubah acak diskrit bisa dilihat dalam Definisi 3.10.

Definisi 3.10 : Kebebasan Stokastik Diskrit

Misalnya dua peubah acak diskrit X dan Y mempunyai nilai fungsi peluang gabgungan di (x, y), yaitu p(x, y) serta masing-masing mempunyai nilai fungsi peluang marginal dari X di x, yaitu $p_1(x)$ *dan nilai fungsi peluang marginal dari Y di y yaitu* $p_2(y)$.

Kedua peubah acak X dan Y dikatakan bebas stokastik, jika dan hanya jika :

$$p(x,y) = p_1(x).\,p_2(y)$$

untuk semua pasangan nilai (x, y).

Definisi 3.11 : Kebebasan Stokastik Kontinu

Misalnya dua peubah acak kontinu X dan Y mempunyai nilai fungsi densitas gabungan di (x, y), yaitu f(x, y) serta masing-masing mempunyai nilai fungsi densitas marginal dari X di x, yaitu $f_1(x)$ *dan nilai fungsi densitas marginal dari Y di y, yaitu* $f_2(y)$.

Kedua peubah acak X dan Y dikatakan bebas stokastik, jika dan hanya jika ;

$$f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$$

Contoh 3.10 :

Misalnya fungsi peluang gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$f(x, y) = x + y \;\; ; 0 < x < 1,\;\; 0 < y < 1$$
$$= 0 \;\; ; x, y \text{ lainnya.}$$

Apakah *X* dan *Y* bebas stokastik?

Penyelesaian

Kita harus menentukan dahulu fungsi densitas marginal masing-masing dari *X* dan *Y*.

Fungsi marginal dari *X* adalah:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{0} f(x, y)\, dy + \int_{0}^{1} f(x, y)\, dy + \int_{1}^{\infty} f(x, y)\, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dy + \int_{0}^{1} (x + y)\, dy + \int_{1}^{\infty} 0\, dy \;\; = \;\; 0 + \{xy + \left(\tfrac{1}{2}\right) y^2\}\,]_{y=0}^{1} + 0$$

$$g(x) = x + \frac{1}{2}$$

Jadi $g(x) = x + \frac{1}{2} \;\; ; 0 < x < 1$

$= 0 \;\; ; x$ lainnya.

Fungsi marginal dari *Y* adalah:

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} f(x, y)\, dx + \int_{0}^{1} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{\infty} f(x, y)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} (x + y)\, dx + \int_{1}^{\infty} 0\, dx$$
$$= 0 + \{\left(\tfrac{1}{2}\right) x^2 + xy\}\,]_{x=0}^{1} + 0$$

$h(y) = \frac{1}{2} + y$

Jadi $h(y) = \frac{1}{2} + y \;\; ; 0 < y < 1$

$= 0 \;\; ; y$ lainnya.

Maka : $g(x).h(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \; (\frac{1}{2} + y)$

$= \frac{x}{2} + xy + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$

Ternyata $f(x, y) \neq g(x).h(y)$, karena $x + y \neq \frac{x}{2} + xy + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$

Sehingga X dan Y merupakan peubah acak yang tidak bebas stokastik atau bergantungan.

BAB IV
EKSPEKTASI SATU PEUBAH ACAK

4.1 NILAI EKSPETASI

Perhitungan nilai ekspektasi dari fungsi peubah acak diskrit bisa dilihat dalam definisi 4.1.

Definisi 4.1 : Nilai Ekspektasi Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluangnya di x adalah p(x) dan u(X) adalah fungsi dari X, maka nilai ekspektasi dari u(X), dinotasikan dengan E[u(X)], didefiniskan sebagai:

$$E[u(X)] = \sum_{x} u(x)\,.\,p(x)$$

Pemahaman perhitungan nilai ekspektasi tersebut diperjelas melalui Contoh 4. 1.

Contoh 4.1

Misalnya fungsi peluang dari peubah acak *X* berbentuk :

$$p(x) = \frac{x}{15}\ ; x = 1, 2, 3, 4, 5$$

Hitung a. $E(X^2 - 1)$ dan b. $E[X(X + 1)]$.

Penyelesaaian :

a. Berdasarkan definisi nilai ekspektasi diskrit, maka :

$$E(X^2 - 1) = \sum_x (x^2 - 1)\,.p(x) \ = \sum_{x=1}^{5} (x^2 - 1)\ .\ \frac{x}{15}$$

$$= (1 - 1)\left(\frac{1}{15}\right) + (4 - 1)\left(\frac{2}{15}\right) + (9 - 1)\left(\frac{3}{15}\right) + (16 - 1)\left(\frac{4}{15}\right) + (25 - 1)\left(\frac{5}{15}\right)$$

$$= 0 + \frac{6}{15} + \frac{24}{15} + \frac{60}{15} + \frac{120}{15}$$

$$E(X^2 - 1) = \frac{210}{15} = 14$$

b. Berdasarkan definisi nilai ekspektasi diskrit, maka :

$$E[X(X+1)] = \sum_x x(x+1)\,.\,p(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{5} x(x+1)\,.\,\frac{x}{15}$$

$$= (1)(1+1)\left(\frac{1}{15}\right) + (2)(2+1)\left(\frac{2}{15}\right) + (3)(3+1)\left(\frac{3}{15}\right) +$$

$$(4)(4+1)\left(\frac{4}{15}\right) + (5)(5+1)\left(\frac{5}{15}\right)$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{12}{15} + \frac{36}{15} + \frac{80}{15} + \frac{150}{15}$$

$$E[X(X+1)] = \frac{280}{15}$$

Perhitungan nilai ekspektasi dari fungsi peubah acak dari peubah acak kontinu bisa dilihat dalam definisi 4. 2.

Definisi 4.2 : Nilai Ekspektasi Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan nilai fungsi densitasnya di x adalah f(x) dan u(X) adalah fungsi dari X, maka nilai espektasinya dari u(X), dinotasikan dengan E[u(X)], didefinisikan sebagai :

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\ f(x)\,dx$$

Pemahaman perhitungan nilai ekspektasi tersebut diperjelas melalui contoh 4.2.

Contoh 4. 2 :

Misalnya fungsi peluang dari peubah acak X berbentuk :

$$f(x) = 2(1-x);\, 0 < x < 1$$

$$= 0 \ , \quad \text{x lainnya}$$

Hitung $E(X^2 - 1)$ dan $E[X(X+1)]$.

Penyelesaaian :

a. Berdasarkan definisi nilai ekspektasi kontinu, maka :

$E(X^2-1)=\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-1)\ f(x)\,dx$

$=\int_{-\infty}^{0}(x^2-1)\ \ f(x)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-1)\ \ f(x)\,dx+\int_{1}^{\infty}(x^2-1)\ \ f(x)\,dx$

$=\int_{-\infty}^{0}(x^2-1)\,.\ 0\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-1)\,.\ 2(1-x)\,dx+\int_{1}^{\infty}(x^2-1)\,.\ 0\,dx$

$=0+2\int_{0}^{1}(x^2-x^3-1+x)\ dx+0\ =2\ (\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-x+\frac{1}{2}x^2\ ]_{x=0}^{1})$

$=2\ \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}\right)$

$E(X^2-1)=-\frac{5}{6}$

b. Berdasarkan definisi nilai ekspektasi kontinu, maka :

$E[X(X+1)=\int_{-\infty}^{\infty}x(x+1)\,.\ f(x)\,dx$

$=\int_{-\infty}^{0}x(x+1)\,.\ f(x)\,dx+\int_{0}^{1}x(x+1)\,.\ f(x)\,dx+\int_{1}^{\infty}x(x+1)\,.\ f(x)\,dx$

$=\int_{-\infty}^{0}0\ \ dx+\int_{0}^{1}x(x+1)\,.\ 2(1-x)\,dx+\int_{1}^{\infty}0\ \ dx$

$=0+2\int_{0}^{1}(x-x^3)\ dx+0\ \ \ =2\ \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\ ]_{x=0}^{1}\right)$

$=2\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$E(X(X+1)=\frac{1}{2}$

Dalil 4.1 : Sifat-Sifat Nilai Ekspektasi

Misalkan c adalah konstanta dan $u(X)$ adalah fungsi dari X.

i. $\boldsymbol{E(c)=c}$

ii. $\boldsymbol{E[c\,u(X)]=c\,E[u(X)]}$

iii. $\boldsymbol{E[c_1\,u_1(X)+c_2\,u_2(X)]=c_1\,E[u_1(X)]+c_2\,E[u_2(X)]}$

4.2 RATAAN

Jika *u(X)* =*X* dalam definisi 4.1, maka kita akan memperoleh sebuah ukuran yang disebut rataan dari peubah acak diskrit *X* atau rataan dari distribusi.

Definisi 4.3 : Rataan Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dengan nilai fungsi peluang dari X di x adalah p(x), maka rataan dari peubah acak X di definisikan sebagai :

$$E(X) = \sum_{x} x \ . \ p(x)$$

Pemahaman penggunaan rumus rataan diatas akan diperjelas melalui Contoh 4. 3.

Contoh 4.3 :

Jika sandy mengundi sebuah dadu yang seimbang, maka tentukan rataan dari munculnya angka pada mata dadu itu.

Penyelesaian :

Misalnya peubah acak *X* menunjukkan munculnya angka pada mata dadu. Jadi nilai-nilai yang mungkin dari *X* adalah {*x*: *x* = 1, 2, 3, 4, 5, 6}, dengan masing-masing nilai mempunyai peluang yang sama $\frac{1}{6}$.

Jadi : $E(X) = \sum_{x} x \ . \ p(x) \quad = \sum_{x=1}^{6} x \, . \frac{1}{6} \quad = \left(\frac{1}{6}\right)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$

$E(X) = \frac{21}{6} = 3{,}5$

Sehingga apabila dadu yang seimbang itu diundi terus-menerus, maka diharapkan rataan angka pada mata dadu yang akan muncul adalah 3, 5.

Jika *u(X)* = *X* dalam Definisi 4.2, maka kita akan memperoleh sebuah ukuran yang disebut rataan dari peubah acak kontinu *X* atau rataan dari distribusi.

Definisi 4. 4 : Rataan Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan nilai fungsi densitas dari X di x adalah f(x), maka rataan dari peubah X di definisikan sebagai :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\, dx$$

Pemahaman penggunaan rumus rataan distas diperjelas melalui contoh 4.4.

Contoh 4. 4

Misalnya fungsi densitas dari X berbentuk :

$$f(x) = 20x^3(1-x); 0 < x < 1$$

$$= \quad 0 \quad ; \ x \text{ lainnya.}$$

Hitung $E(X)$!

Penyelesaian :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ .\ f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\, .\ f(x)\, dx + \int_{0}^{1} x\, .\ f(x)\, dx + \int_{1}^{\infty} x\, .\ f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\, .\ 0\, dx + \int_{0}^{1} x\, .\, 20\, .\, x^3(1-x)\ dx + \int_{1}^{\infty} x\, .\ 0\, dx$$

$$= 0 + 20\int_{0}^{1}(x^4 - x^5)\, dx + 0$$

$$= 20\ \left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6]_{x=0}^{1}\right)$$

$$= 20\ \left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}\right)$$

$$E(X) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Rataan dari sebuah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu biasanya dinotasikan dengan μ (dibaca " mu"), sehingga apabila peubah acaknya X maka **μ= *E*(*X*).**

4.3 VARIANS

Berikut ini akan dijelaskan definisi varians dari sebuah peubah acak yang berlaku bagi peubah acak diskrit maupun kontinu.

Definisi 4.5: Varians

Misalnya X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Varians dari X didefinisikan sebagai :

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2$$

atau

$$Var(X) = E[X - \mu]^2$$

atau

$$Var(X) = E[X^2] - [E(X)]^2 = E[X^2] - [\mu]^2 \ .$$

Varians dari peubah acak *X* serinng dinotasikan dengan $\boldsymbol{\sigma_x^2}$.

Akar pangkat dua yang positif dari varians disebut **simpangan baku** dari peubah acak *X* dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{\sigma_x}$.

Perhitungan varians dari peubah acak diskrit bisa dilihat dalam Definisi 4.6.

Definisi 4. 6 : Varians Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka varians dari X didefinisikan sebagai :

$$Var(X) = \sum_x (x - \mu)^2 \ . \ p(x)$$

Pemahaman penggunaan rumus varians diskrit di atas diperjelas melalui Contoh 4.5 berikut ini.

Contoh 4. 5

Misalnya distribusi peluang dari peubah acak *X* adalah sebagai berikut :

x	1	2	3
$p(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Hitung $Var(X)$.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi varins diskrit, maka :

$Var(X) = \sum_x E[X-\mu]^2 \ . \ p(x)$

Oleh karena

$\mu = E(X) = \sum_x x \ . \ p(x)$

$= \sum_x^3 x \ . \ p(x)$

$= (1)\,.\,p(1) + (2).\,p(2) + (3)\,.\,p(3)$

$= (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)\left(\frac{1}{3}\right) + (3)\left(\frac{1}{6}\right)$

$\mu = \ E(X) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Maka:

$Var(X) = \sum_x \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 . \, p(x)$

$= \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 . \, p(1) + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 . \, p(2) + \left(3 - \frac{5}{3}\right)^2 . \, p(3)$

$= \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{16}{9}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$

$= \frac{2}{9} + \frac{1}{27} + \frac{8}{27}$

$Var(X) = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$

Perhitungan varians dari peubah acak kontinu bisa dilihat dalam definisi 4. 7.

Definisi 4. 7 : Varians Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka varians dari X didefinisikan sebagai berikut :

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \ f(x)\, dx$$

Pemahaman penggunaan rumus varians kontini diperjelas melalui Contoh 4. 6.

Contoh 4.6 :

Misalnya fungsi densitas dari *X* berbentuk :

$$f(x) = e^{-x}; \quad x > 0$$

$$= \ 0 \ ; \ x \text{ lainnya.}$$

Hitung $Var(X)$!

Penyelesaian :

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \ . \ f(x)\, dx$$

Perhatikan bahwa

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \ . \ f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \ . \ f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} x \ . \ f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \ . \ 0 \ dx + \int_{0}^{\infty} x \ . \ e^{-x} \ dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} x \ . \ e^{-x} \ dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x \ . \ e^{-x} \ dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} (-x \ . \ e^{-x} \,]_{x=0}^{b} + \int_{0}^{b} \ e^{-x} \ dx) \text{ , [pakai integral parsial]}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ (-b \,.\, e^{-b} + 1 - \lim_{b\to\infty} \ e^{-b} \qquad \text{, [pakai aturan L'Hospital]}$$

$$\mu = 0 + 1 - 0 = 1.$$

Maka

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2\ .\ f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (x-1)^2\ .\ f(x)\ dx + \int_{0}^{\infty} (x-1)^2\ .\ f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (x-1)^2\ .\ 0\ dx + \int_{0}^{\infty} (x-1)^2\ .\ e^{-x}\ dx$$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} (x^2 - 2x + 1)\ .\ e^{-x}\ dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} (x^2 - 2x + 1)\ .\ e^{-x}\ dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x^2\ e^{-x}\ dx - 2 \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x\ e^{-x}\ dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-x}\ dx$$

Penyelesaian diatas akan diselesaikan satu per satu.

$$(i).\ \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x^2\ \ e^{-x}\ dx = \lim_{b\to\infty} [-b^2\ .\ e^{-b} + 2(-b.e^{-b} + 1 - e^{-b})]$$

$$= \lim_{b\to\infty} - b^2 . e^{-b} - 2 . \lim_{b\to\infty} b . e^{-b} + \lim_{b\to\infty} 2 - 2 . \lim_{b\to\infty} e^{-b}$$

$$= 0 - (2)(0) + (2)(1) - (2)(0)\ = 0 - 0 + 2 - 0$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x^2\ \ e^{-x}\ dx = 2.$$

(ii). $\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x\ .\ e^{-x}\ dx = 1.$

(Lihat perhitungan μ pada halaman sebelumnya).

(iii). $\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b}\ e^{-x}\ dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-x}]_{x=0}^{b})$

$$= \lim_{b\to\infty} (1 - e^{-b})$$

$$= \lim_{b\to\infty} 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b}$$

$$= 1 - 0$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b}\ e^{-x}\ dx = 1$$

Jadi : $Var(X) = 2 - (2)(1) + 1 = 1.$

Dalil 4.1:

Jika c adlah sebuah konstanta, maka ***Var*** **(*c*) = 0.**

Bukti :

Berdasarkan defenisi dari perumusan varians , maka:

Var (c) = $E[\ c - E(\ c\ )]^2$

= $E(\ c - c\ )^{\ 2}$ = E (0)

Var (c) = 0 (terbukti).

Dalil 6.2 :

Jika X adalah peubah acak dan c adalah sebuah konstanta, maka :

$$\boldsymbol{Var\ (\ X + c\ ) = Var\ (X)}$$

Bukti :

Berdasarkan definisi dari perumusan varians, maka :

Var (X + c) = $E[(\ X + c\ ) - E\ (\ X + c\ )]^2$

= $E[(\ X + c\ ) - E(X) - E\ (c\ )]^2$

= $E[X + c - E(X) - c]^2$

= $E[X - E(X)]^2$

Var (X + c) = Var (X) (terbukti)

Dalil 4.3 :

Jika a dan b adalah dua buah konstanta dan X adalah peubah acak, maka :

$$\boldsymbol{Var\ (aX + b) = a^2\ Var\ (X)}$$

Bukti :

Berdasarkan definisi dari perumusan varians, maka :

Var (aX + b) = $E[(a\mathrm{X}\ +\ \mathrm{b}) - E\ (\ a\mathrm{X}\ +\ \mathrm{b}\ )]^2$

$= E[\, a\mathrm{X} + \mathrm{b} - E(aX) - E\,(b)]^2$

$= E[\, a\mathrm{X} + \mathrm{b} - a\,.\; E(X) - b]^2$

$= E[\, a\mathrm{X} - a\,.E(X)]^2$

$= a^2\,.E[\,\mathrm{X} \;\; - E(X)]^2$

$Var\;(aX + b) = a^2\;Var\;(X)$ (terbukti)

Contoh 4.7 :

Misalnya Farah mengundi sebuah dadu yang seimbang. Jika peubah acak *X* menyatakan kuadrat dari munculnya angka pada mata dadu, maka hitunglah

a. Var (2*X*) ; b. Var ($\frac{1}{2}X - 1$).

Penyelesaian:

Distribusi peluang dari *X* berbentuk :

x	1	4	9	16	25	36
p(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Berdasarkan definisi rataan diskrit, maka

$$E(X) = \sum_x x.p(x)$$

$$= (1)\left(\frac{1}{6}\right) + (4)\left(\frac{1}{6}\right) + (9)\left(\frac{1}{6}\right) + (16)\left(\frac{1}{6}\right) + (25)\left(\frac{1}{6}\right) + (36)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6}$$

$$E(X) = \frac{91}{6}$$

Berdasarkan definisi nilai ekspektasi diskrit, maka :

ii. $E(X^2) = \sum_x x^2.p(x)$

$$= (1)\left(\frac{1}{6}\right) + (16)\left(\frac{1}{6}\right) + (81)\left(\frac{1}{6}\right) + (196)\left(\frac{1}{6}\right) + (625)\left(\frac{1}{6}\right) + (1296)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{16}{6} + \frac{81}{6} + \frac{196}{6} + \frac{625}{6} + \frac{1296}{6}$$

$$E(X^2) = \frac{2215}{6}$$

Maka : $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2215}{6} - \frac{8281}{36} = \frac{5009}{36}$

Berdasarkan dalil 4.3

Maka:

a. $Var(2X) = 4\ Var(X)$

$$= (4)\left(\frac{5009}{36}\right)$$

$$Var(2X) = \frac{5009}{9}$$

dan

b. $Var\left(\frac{1}{2}X - 1\right) = \frac{1}{4}\ Var(X)$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5009}{36}\right)$$

$$Var\left(\frac{1}{2}X - 1\right) = \frac{5009}{144}.$$

4.4 Pendekatan Nilai *E*[*H(X)*] dan Var [*H*(*x*)]

Berikut ini akan dijelaskan perhitungan nilai ekspektasi dan varians dari fungsi peubah acak, khusunya peubah acak kontinu secara pendekatan.

Misalnya $H(X)$ adalah fungsi dari peubah acak kontinu X. Kemudian kita bisa menghitung nilai espektasi dari $H(X)$, yaitu $E[H(X)]$, dan nilai varians dari $H(X)$, yaitu $\mathrm{Var}[H(X)]$. Akan tetapi, kadang-kadang kita mengalami kesulitan dalam perhitungannya. Hal ini mungkin disebabkan karena bentuk dari $H(X)$ yang rumit. Untuk mengatasinya, berikut ini dijelaskan sebuah cara untuk menghitung $E[H(X)]$ dan $\mathrm{Var}[H(X)]$ secara pendekatan.

Jika $Y = H(X)$ dan $x = \mu$, maka dengan menggunkan perluasan deret Taylor diperoleh:

$$Y = H(\mu) + (x-\mu).H'(\mu) + \frac{(x-\mu)^2}{2}.H''(\mu) + R$$

dengan R adalah sisa.

Maka :

1. $E(Y) = E\left[H(\mu) + (x-\mu).H'(\mu) + \frac{(x-\mu)^2}{2}.H''(\mu) + R\right]$

$$= E[H(\mu)] + E[(X-\mu)].H'(\mu) + \frac{1}{2}E(X-\mu)^2.H''(\mu) + E(R)$$

$$= H(\mu) + [E(X) - E(\mu)].H'(\mu) + \frac{1}{2}E(X-\mu)^2.H''(\mu) + (R)$$

$$E(Y) \approx H(\mu) + (\mu-\mu).H'(\mu) + \frac{1}{2}Var(X).H''(\mu)$$

$$E(Y) \approx H(\mu) + \frac{1}{2}Var(X).H''(\mu)$$

$$E(Y) \approx H(\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2.H''(\mu)$$

Jadi:

$$E(Y) \approx H(\mu) + \frac{1}{2}.H''(\mu).\sigma^2$$

2. Bentuk Y diatas bisa ditulis sebagai berikut.

$$Y = H(\mu) + (H-\mu).H'(\mu) + R_1$$

Dengan: $R_1 = \frac{(X-\mu^2)}{2}H''(\mu) + R$

Maka:

$$Var(Y) = Var\ [H(\mu) + (X-\mu).H'(\mu) + R_1]$$

$$= Var[(X-\mu).H'(\mu)] + Var(R_1)$$

$$= [(X-\mu)^2].Var(X) + Var(R_1)$$

$Var(Y) = [(X - \mu)^2].Var(X)$

Jadi :

$$Var(Y) \approx [(X - \mu)^2].Var(X)$$

4.5 MOMEN

Pada bagian sebelumnya, kita telah menghitung nilai $E(X)$ dan $E(X^2)$. Dengan perkataan lain, kita hanya dapat menghitung nilai ekspekasi dari peubah acak X dengan pangkatnya paling tinggi 2. Berikut ini akan dijelaskan perumusan secara umum dalam perhitungan nilai ekspektasi dari peubah acak dengan pangkatnya lebih dari 2.

Definisi 4.8: Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka momen ke-k (dinotasikan dengan μ_k') di definisikan sebagai:

$$\mu_k' = E(X^k), \qquad k = 1,2,3, \ldots$$

Definisi 4.9: Moment Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x,maka momen ke-k (dinotasikan dengan μ_k') idefinisikan sebagai:

$$\mu_k' = \sum_x x^k.p(x)$$

Pemahaman penggunaan rumus momen diskrit diatas diperjelas melalui contoh 4.8.

Contoh 4.8.

Berikut ini diberikan distribusi peluang dari peubah acak *X*.

x	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

Hitung nilai μ_3'

Penyelesaian :

Berdasarkan definisi moment diskrit, maka:

$\mu_3' = E(X^3) = \sum_x x^3 . p(x)$

$= \sum_x^4 x^3\, p(x)$

$= \ (1)^3 \left(\frac{1}{4}\right) + (2)^3 \left(\frac{1}{8}\right) + (3)^3 \left(\frac{1}{8}\right) + (4)^3 \left(\frac{1}{2}\right)$

$= \ \frac{1}{4} + 1 + \frac{27}{8} + \frac{64}{2}$

$\mu_3' = E(X^3) = \frac{293}{8}$

Momen dari peubah acak kontinu secara umum ditentukan berdasarkan definisi 4.10.

Definisi 4.10: Momen Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka momen ke-k (dinotasikan dengan μ_k') didefinisikan sebagai :

$$\mu_k' = \int_{-\infty}^{\infty} x^k . f(x)\, dx$$

Pemahaman pengunaan rumus momen kontinu diatas diperjelas melalui contoh 4.9.

Contoh 4.9:

Misalnya fungsi densitas dari *X* berbentuk:

$$f(x) = \frac{2x}{3}; 1 < x < 2$$

$$= 0 ; x \text{ lainnya.}$$

Hitung μ'_3.

Penyelesaian:

$\mu'_3 = E(X^3) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 . f(x)dx$

$= \int_{-\infty}^{1} x^3 . f(x)dx + \int_{1}^{2} x^3 . f(x)dx + \int_{2}^{\infty} x^3 . f(x)dx$

$= \int_{-\infty}^{1} x^3 . 0\ dx + \int_{1}^{2} x^3 . \frac{2x}{3} dx + \int_{2}^{\infty} x^3 . 0\ dx = 0 + \left(\frac{2}{15} x^5]_{x=1}^{2}\right) + 0$

$\mu'_3 = E(X^3) = \frac{62}{15}$

Pada bagian sebelumnya, kita sudah mengetahui bahwa varians dari sebuah peubah acak adalah nilai ekspektasi dari pangkat dua untuk penyimpangan peubah acak tersebut terhadap rataannya. Berikut ini akan diperjelaskan perumusan umum untuk menghitung nilai ekspektasi dari pangkat *k* untuk penyimpangan sebuah peubah acak terhadap rataannya yang dinamakan ***momen sekitar rataan***.

Definisi 4.11: Momen Sekitar Rataan

Jika X adalah peubah acak, naik diskrit maupun kontinu, maka momen sekitar rataan ke-k (dinotasika dengan μ_k*) didefinisikan sebagai:*

$$\mu_k = E(X - \mu)^k; \quad k = 1,2,3, \ldots$$

Berdasrakan perumusan diatas, kita akan menghitungnilai momen sekitar rataan untuk beberapa nilai *k*.

Untuk k = 0

$\mu_0 = E(X - \mu)^0 = E(1) = 1$

Untuk k = 1

$\mu_1 = E(X-\mu)^1 = E(X) - \mu = \mu - \mu = 0$

Untuk k = 2

$\mu_2 = E(X-\mu)^2 = Var(X)$

Untuk k = 3

$\mu_3 = E(X-\mu)^3$, dan seterusnya.

Momen sekitar rataan dari peubah acak diskrit ditentukan berdasarkan definisi 4.12.

Definisi 4.12 : Momen Sekitar Rataan Diskrit

Jika Xa adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka momen sekitar rataan ke-k (dinotasikan dengan μ_k*) didefinisikan sebagai:*

$$\mu_k = \sum_x (x-\mu)^k . p(x)$$

Pemahaman penggunaan rumus diatas diperjelas melalui Contoh 4.10.

Contoh 4.10:

Misalnya fungsi peluang dari X berbentuk:

$$p(x) = \frac{1}{3};\ \ x = 1,2,3$$

Hitung μ_3.

Penyelesaian

Berdasarkan definisi momen sekitar rataan diskrit, maka :

$\mu_3 = (x-\mu)^3 . p(x)$

Kita akan menghitug dahulu nilai μ.

Berdasarkan definisi rataan diskrit, maka:

$\mu = E(X) = \sum_x x.p(x)$

$= \sum_{x=1}^{3} x \cdot \frac{1}{3}$

$= (\frac{1}{3})(1 + 2 + 3)$

$\mu = E(X) \ = 2$

Jadi :

$\mu_3 \ = \sum_{x=1}^{3} (x-2)^3 . \frac{1}{3}$

$= \left(\frac{1}{3}\right)[(1-2)^3 + (2-2)^3 + (3-2)^3)]$

$= \left(\frac{1}{3}\right)(-1 + 0 + 1)$

$\mu_3 \ = 0$

Momen sekitar rataan dari peubah acak kontinu ditentukan berdasarkan definisi 4.13.

Definisi 4.13: MOMEN SEKITAR RATAAN KONTINU

Jika X adalah peubah acak kontinu dan p(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka momen sekitar rataan ke-k (dinotasikan dengan μ_k) didefiniskan sebagai:

$$\mu_k \ = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k . f(x)\, dx$$

Pemahaman penggunaan rumus diatas diperjelas melalui Contoh 4.11

Contoh 4.11:

Misalnya fungsi densitas dari X berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{10}; \ \ 20 < x < 30$$

$$= \ \ 0\ ; \ \ x \text{ lainnya.}$$

Hitung μ_3 .

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi momen sekitar rataan kontinu, maka:

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^3 . f(x)\, dx$$

Kita akan menghitung dahulu nilai μ.

Berdasarkan definisi rataan kontinu maka :

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x. f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{20} x. f(x)\, dx + \int_{20}^{30} x. f(x)\, dx + \int_{30}^{\infty} x. f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{20} x. 0\, dx + \int_{20}^{30} x. \frac{1}{10}\, dx + \int_{30}^{\infty} x. 0\, dx$

$= 0 + \left(\frac{1}{20} x^2]_{x=20}^{30} \right) + 0$

$\mu = E(X) = 25$

Jadi :

$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-25)^3 . f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{20} (x-25)^3 . f(x)\, dx + \int_{20}^{30} (x-25)^3 . f(x)\, dx + \int_{30}^{\infty} (x-25)^3 . f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{20} (x-25)^3 . 0\, dx + \int_{20}^{30} (x-25)^3 . \frac{1}{10}\, dx + \int_{30}^{\infty} (x-25)^3 . 0\, dx$

$= 0 + \frac{1}{10} \int_{20}^{30} (x-25)^3 . dx + 0$

Misalnya: $u = x - 25$

$du = dx$

Batas-batas: Untuk x = 20, maka $u = -5$

Untuk x = 30, maka $u = 5$

$$\mu_3 = \frac{1}{10}\int_{-5}^{5} u^3 d\mu$$

$$= \frac{1}{40}\ u^4]_{u=-5}^{5}$$

$$\mu_3 = 0$$

Dengan menggunakan dalil binomial, kita dapat menurunkan hubungan antara momen dan momen sekitar rataan dari sebuah peubah acak.

Berdasarkan definisi momen sekitar rataan diskrit, maka:

$$\mu_k = E[(X-\mu)^k]$$

$$= E\left[\ \textstyle\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i} x^i(-\mu)k^{-i}\right]$$

$$\mu_k = \textstyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu_i'\,(-\mu)^{k-i}$$

Jadi:

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\mu_i'\,(-\mu)^{k-i}$$

Kemudian kita akan mensubtitusikan beberapa nilai *k* kedalam rumus diatas.

Untuk *k* = 1

$$\mu_1 = \textstyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} x_i'\,(-\mu)^{1-i}$$

$$= \binom{1}{0}\mu_0'(-\mu)^1 + \binom{1}{1}\mu_1'(-\mu)^0$$

$$= -\mu + \mu_1'$$

$$= \mu - \mu$$

$$\mu_1 = 0$$

Untuk k = 2

$$\mu_2 \quad = \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} \mu_i' \, (-\mu)^{2-i}$$

$$= \binom{2}{0} \mu_0'(-\mu)^2 + \binom{2}{1} \mu_1'(-\mu)^1 + \binom{2}{2} \mu_2'(-\mu)^0$$

$$= \mu^2 - 2\, \mu_1' \, \mu + \mu_2'$$

$$\mu_2 \quad = \mu_2' \, - \mu^2$$

Untuk k = 3

$$\mu_3 \quad = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} \mu_i' \, (-\mu)^{3-i}$$

$$= \binom{3}{0} \mu_0'(-\mu)^3 + \binom{3}{1} \mu_1'(-\mu)^2 + \binom{3}{2} \mu_2'(-\mu)^1 + \binom{3}{3} \mu_3'(-\mu)^0$$

$$= -\mu^3 - 3\, \mu_1' \, \mu^2 - 3\, \mu_2' \, \mu^3 + \; \mu_3'$$

$$\mu_3 \quad = \mu_1' \, - 3\, \mu_2' \, \mu + 2\mu^3$$

Dan seterusnya.

Sehingga hasil akhir dari penurunan sampai k = 3 adalah sebagai berikut.

$$\mu_1 \quad = 0$$

$$\mu_2 \quad = \mu_2' \, - \mu^2$$

$$\mu_3 \quad = \mu_1' \, - 3\, \mu_2' \, \mu + 2\mu^3$$

4.6 FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN

Pada bagian sebelumnya, kita sudah membahas momen ke-*k* yang dinotasikan dengan μ_k'

Momen ini bisa juga diperoleh melalui besaran lainnya, yang dinamakan *fungsi pembangkit momen.* Sehingga fungsi pembangkit momen merupakan sebuah fungsi yang dapat menghasilkan momen-momen. Selain itu, penentuan distribusi baru dari peubah acak yang baru merupakan kegunaan lain dari fungsi pembangkit momen.

Definisi 4.14: Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka fungsi pembangkit momen dari X (dinotasikan dengan $M_X(t)$) didefinisikan sebagai:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Untuk $-h < t < h$ *dan* $h > 0$.

Fungsi pembangkit momen dari peubah acak diskrit secara umum ditentukan berdasarkan definisi 4.15 .

Definisi 4.15. Fungsi Pembangkit Momen Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan p(x) adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx}\ p(x)$$

Fungsi pembangkit momen dari peubah acak kontinu secara umum ditentukan berdasarkan definisi 4.16.

Definisi 4.16: Fungsi Pembangkit Momen Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan f(x) adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari x didefinisikan sebagai:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\ f(x)\,dx$$

Berikut ini dijelaskan dua cara dalam pembuktian bahwa fungsi pembangkit momen itu bisa menghasilkan momen-momen.

Cara 1. Jika dari Definisi 4.14, e^{tx} diuraiakan denang menggunakan perluasan deret Maclaurin, maka akan diperoleh:

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$= E\left(1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \cdots + \frac{(tX)^r}{r!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + t\,.\,E(X) + \frac{t^2}{2!}\,.\,E(X^2) + \frac{t^3}{3!}\,.\,E(X^3) + \cdots + \frac{t^r}{r!}\,.\,E(X^r) + \cdots$$

Jika $M_x(t)$ diturunkan terhadap *t*, kemudian harga *t* sama dengan nol, maka akan diperoleh:

$$M_X'(t) = E(X) + \frac{2t}{2!}\,.E(X^2) + \frac{3t^2}{3!}\,.E(X^3) + \cdots + \frac{rt^{r-1}}{r!}\,.E(X^r) + \cdots$$

$$M_X'\,(0) = E(X) = \mu_1'$$

$$M_X''\,(t) = E(X^2) + \frac{6t}{3!}\,.E(X^3) + \cdots + \frac{r(r-1)t^{r-2}}{r!}\,.E(X^r) + \cdots$$

$$M_X''\,(0) = E(X^2) = \mu_2'$$

$$M_X'''(t) = E(X^3) + \cdots + \frac{r(r-1)(r-2)^{r-2}}{r!}\,.E(X^r) + \cdots$$

$$M_X'''(0) = E(X^2) = \mu_3'$$

Demikian seterusnya, sehingga apabila $M_x(t)$ diturunkan terhadap *t* sebanyak *r* kali, kemudian harga *t* sama dengan nol, maka akan diperoleh:

$$M_X^r\,(0) = E(X^r) = \mu_r'$$

Cara 2. Dalam hal ini, kita akan menurunkan terhadap *t* dari perumusan pada Definisi 6.14.

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
$$M_X'(t) = E(X.e^{tX})$$
$$M_X'\,(0) = E(X.e^0) = E(X) = \mu_1'$$
$$M_X''\,(t) = E(X^2e^{tX})$$
$$M_X''\,(0) = E(X^2e^0) = E(X^2) = \mu_2'$$
$$M_X'''(t) = E(X^3e^{tX})$$
$$M_X'''(0) = E(X^3e^0) = E(X^3) = \mu_3'$$

Demikian seterusnya, sehingga apabila $M_x'\,(t)$ diturunkan terhadap *t* sebanyak *r* kali, kemudian harga *t* sama dengan nol, maka akan diperoleh:

$$M_x^r\,(0) = E(X^r) = \mu_r'$$

Dalil 4.4: Penurunan Momen Dari Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu dan $M_X(t)$ adalah fungsi pembangkit momennya, maka:

$$M_X^r(t)]_{t=0} = \mu_r'$$

$M_X^r(t)$ adalah turunan ke-r dari fungsi pembangkit momen

Pemahaman penentuan fungsi pembangkit momen dari sebuah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu diperjelas melalui contoh 4.18.

Contoh 4.18 :

Misalnya fungsi peluang dari *X* berbentuk:

$$p(x) = \frac{1}{4}\binom{2}{x} \; ; x = 0,1,2$$

a. Tentukan fungsi pembangkit momen dari *X*.

b. Hitung μ_1' dan μ_2' berdasarkan hasil fungsi pembangkit momen.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen diskrit, maka:

a. $M_X(t) = \sum_x e^{tx}\, p(x)$

$$= \sum_{x=0}^{2} e^{tx}\, \frac{1}{4} \cdot \binom{2}{x}$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + e^t . \binom{2}{1} + e^{2t} . \binom{2}{2}\right]$$

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{4}\right)(1 + 2e^t + e^{2t}) \; ; t \in \Re$$

b.1. $\mu_1' = M_x'(t)]_{t=0}$

$$= \frac{1}{4}(0 + 2e^t + 2e^{2t})]$$

$$= \frac{1}{4}(2 + 2)$$

$$\mu_1' = 1$$

b. 2. $\mu_2' = M_x''(t)]_{t=0}$

$= \frac{1}{4}(\ 2.e^{t} + 4.e^{2t}\ )]_{t=0}$

$= \frac{1}{4}(2 + 4)$

$\mu_2' = 1{,}5$

Contoh 4.19:

Misalkan fungsi densitas dari X berbentuk:

f(x) = $\frac{2x}{3}$; 1 < x < 2

= 0 ; x lainnya

a. Tentukanlah fungsi pembangkit momen dari X

b. Hitung μ_1' dan μ_2' berdasarkan hasil fungsi pembagkit momen

Penyelesaian:

a. Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen kontinu, maka:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{1} e^{tx} f(x)\, dx + \int_{1}^{2} e^{tx} f(x)\, dx + \int_{2}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= 0 + \frac{2}{3}\int_{1}^{2} x\, e^{tx}\, dx + 0$$

= ..... dst [gunakan pengintegralan parsial]

$$M_X(t) = \frac{2(2t-1)e^{2t} + 2(1-t)e^{t}}{3t^2}\ ;\ t \neq 0$$

Kita akan mencari $M_X(t)$ untuk t = 0 dengan menggunakan dalil L'Hospital.

$$M_X(t) = \lim_{t\to 0} \frac{2(2t-1)e^{2t} + 2(1-t)e^{t}}{3t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{8t\, e^{2t} + 2(1-t)e^{t}}{6t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{16t\, e^{2t} + 8\, e^{2t} - 2t\, e^{t} - 2e^{t}}{6}$$

$M_X(t) = 1.$

Sehingga fungsi pembangkit momen dari X berbentuk :

$$M_X(t) = \frac{2(2t-1)e^{2t} + 2(1-t)e^{t}}{3t^2}\ ;\ t \neq 0$$

$$= 1 \quad ; \quad t = 0$$

Berikut ini dijelaskan beberapa sifat dari fungsi pembangkit momen.

Dalil 6.5:

Jika X adalah peubah acak dan c adalah sebuah konstanta, maka:

$$M_{cX}(t) = M_X(ct)$$

Bukti:

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen, maka:

$M_{cX}(t) = E(e^{t.cX})$

$= E(e^{ct.X})$

$M_{cX}(t) = M_X(ct)$ (terbukti).

Dalil 4.6:

Jika X adalah peubah acak dan c adalah sebuah konstanta, maka:

$$M_{X+c}(t) = e^{ct}\,.\,M_X(t)$$

Bukti:

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen, maka:

$M_{X+c}(t) = E(e^{t(X-c)})$

$= E(e^{tX}.\,e^{ct})$

$= e^{ct}.\,E(e^{tX})$

$M_{X+c}(t) = e^{ct}\,.\; M_X(t)$ (terbukti).

Dalil 4.7:

Jika X adalah peubah acak, sedangkan a dan b adalah dua buah konstanta, maka:

$$M_{\frac{X+a}{b}}(t) = e^{\frac{at}{b}}\,.\; M_x\left(\frac{t}{b}\right)$$

Bukti :

Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen, maka:

$$M_{\frac{X+c}{b}}(t) = E\left(et^{\frac{t|(Xa)|}{b}}\right)$$

$$= E\left(et^{\frac{tX}{b}} \cdot e^{\frac{at}{b}}\right)$$

$$= e^{\frac{at}{b}} E\left(et^{\frac{tX}{b}}\right)$$

$$M_{\frac{X+c}{b}}(t) = e^{\frac{at}{b}} \cdot M_X\left(\frac{t}{b}\right)$$ (terbukti).

Soal Latihan

1. Misalkan fungsi peluang dari X berbentuk:

   p(x) = $\frac{x}{15}$;   x = 1, 2, 3, 4, 5

   Hitunglah :

   a. $E[(X^2+2)^2]$
   b. $E(6X^2-1)$
   c. Var(X)
   d. μ_3'
   e. μ_3
   f. $M_X(t)$
   g. Berdasarkan hasil f , hitunglah E(X).

2. Sebuah kotak berisi 4 bola yang bernomor 1, 2, 3, dan 4. Kemudian dua bola diambil secara sekaligus dari kotak itu.

   Hitunglah :

   a. $E(X^2-1)$
   b. $E(X^3-2X^2+2X-1)$
   c. Var(X)
   d. μ_3'
   e. μ_3
   f. $M_X(t)$
   g. Berdasarkan hasil f , hitunglah E(X).

3. Misalkan fungsi densitas dari X berbentuk :

   f(x) = 6x(1-x)   ; 0 < x < 1

   = 0   ; x lainnya

   Hitunglah :

   a. $E(3X-4)$
   b. $E(2X^2-X+1)$
   c. Var(X)
   d. μ_3'
   e. μ_3
   f. $M_X(t)$
   g. Berdasarkan hasil f , hitunglah E(X).

BAB V

EKSPEKTASI DUA PEUBAH ACAK

5.1 NILAI EKSPEKTASI GABUNGAN

Perhitungan nilai ekspektasi gabungan dari dua peubah acak diskrit ditentukan berdasarkan Definisi 5.1.

Definisi 5.1: Nilai Ekspektasi Gabungan Diskrit

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p(x, y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari (X, Y), dan v(X, Y) adalah fungsi dari peubah acak X dan Y; maka nilai ekspektasi gabungan dari v(X, Y) (dinotasikan dengan E[v(X, Y)] dirumuskan sebagai:

$$E[v(X,Y)] = \sum_x \sum_y v(x,y).p(x,y)$$

Pemahaman perhitungan nilai ekspektasi gabungan diskrit tersebut diperjelas melalui Contoh 5.1.

Contoh 5.1:

Misalnya fungsi peluang gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$p(x,y) = \left(\frac{1}{72}\right)(x+2y); \quad x = 0,1,2,3$$
$$y = 0,1,2,3$$

Hitung $E(2XY^2 - 1)$.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi nilai ekspektasi gabungan diskrit, maka:

$E(2XY^2 - 1) = \sum_x \sum_y (2xy^2 - 1).p(x,y)$

$= \sum_{x=0}^{3} \sum_{y=0}^{3} (2xy^2 - 1).\frac{1}{72}(x+2y)$

$= \left(\frac{1}{72}\right)[(-1)(0) + (-1)(2) + (-1)(4) + (-1)(6) + (-1)(1) + (-1)(3) + (7)(5) + (17)(7) + (-1)(2) + (3)(4) + (15)(6) + (35)(8) + (-1)(3) + (5)(5) + (23)(7) + (53)(9)]$

$$= \left(\frac{1}{72}\right)(0 - 2 - 4 - 6 - 1 + 3 + 35 + 119 - 2 + 12 + 90 + 280 - 3 + 25 + 161 + 477)$$

$$E(2XY^2 - 1) = \frac{1184}{72}$$

Perhitungan nilai ekspektasi gabungan dari dua peubah acak kontinu ditentukan berdasarkan Definisi 5.2 berikut

Definisi 5.2 : Nilai Ekspektasi Gabungan Kontinu

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, f(x, y) adlah nilai fungsi densitas gabungan dari (X, Y) di (x, y), dan v(x, y) adalah fungsi dari peubah acak X dan Y; maka nilai ekspektasi gabungan dari v(x, y) (dinotasikan dengan E[v(x, y)] dirumuskan sebagai:

$$E[v(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v(x,y)\, f(x,y)\ dx\ dy$$

Pemahaman perhitungan nilai ekspektasi gabungan kontinu tersebut diperjelas melalui Contoh 5.2.

Contoh 5.2 :

Misalnya densitas gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$f(x,y) = x + y\,; 0 < x < 1\,, 0 < y < 1$$

$$= 0\,; \quad x, y \text{ lainnya.}$$

Hitung $E(2XY^2 - 1)$.

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi nilai ekspektasi gabungan kontinu, maka:

$$E(2XY^2 - 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (2xy^2 - 1)\, f(x,y)\, dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} (2xy^2 - 1)\, f(x,y)\, dx\ dy + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} (2xy^2 - 1)\, f(x,y)\, dx\ dy + \int_{1}^{\infty} \int_{1}^{\infty} (2xy^2 - 1)\, f(x,y)\, dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} (2xy^2 - 1).0\, dx\ dy + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} (2xy^2 - 1)\,(x + y)\, dx\ dy + \int_{1}^{\infty} \int_{1}^{\infty} (2xy^2 - 1).0\, dx\ dy$$

$$= 0 + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} (2x^2y^2 + 2xy^3 - x - y)\, dx\ dy + 0$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3y^2 + x^2y^3 - \frac{1}{2}x^2 - xy \,]_{x=0}^1 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}y^2 + y^3 - \frac{1}{2} - y \right) dy$$

$$= \frac{2}{9}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2]_{x=0}^1$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$E(2XY^2 - 1) = -\frac{19}{36}$$

5.2 EKSPEKTASI BERSYARAT

Penentuan ekspektasi bersyarat dari sebuah peubah acak diskrit diberikan peubah acak diskrit lainnya, baik ekspektasi bersyarat dari *X* diberikan *Y* = *y* maupun ekspektasi bersyarat dari *Y* diberikan *X* = *x* dijelaskan dalam Definisi 7.3.

Definisi 5.3: Ekspektasi Bersyarat Diskrit

Jika X adan Y adalah dua peubah acak diskrit, $p'(x|y)$ nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan $p''(y|x)$ adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari u(X) diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut.

$$E[u(X)|y] = \sum_x u(x).p'(x|y)$$

dan ekspektasi bersyarat dari v(Y) diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut.

$$E[v(Y)|x] = \sum_y v(y).p''(y|x)$$

Penentuan ekspektasi bersyarat diskrit diatas diperjelas melalui Contoh 5.3.

Contoh 7.3:

Misalnya fungsi peluang gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$p(x,y) = \frac{xy}{18}; \quad x = 1,2,3 \;\; dan \quad y = 1,2$$

Hitung $E(3X|y = 1)$ dan $E(2Y^2|x = 1)$

Penyelesaian:

a. Berdasarkan definisi ekpektasi bersyarat diskrit, maka:

   $E(3X|y = 1) = \sum_x 3x.p'(x|y)$

Fungsi peluang marginal dari *Y* adalah:

$p_2(y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{xy}{18}$

$= \left(\frac{y}{18}\right)(1 + 2 + 3)$

$= \frac{6y}{18}$

Jadi, $p_2(y) = \frac{y}{3}; y = 1,2$

Fungsi peluang bersyarat dari *X* diberikan *Y* = *y* adalah:

$p'(x|y) = \frac{\frac{xy}{18}}{\frac{y}{3}} = \frac{x}{6}; x = 1,2,3$

Maka:

$E(3X|y = 1) = \sum_{x=1}^{3} (3x)\left(\frac{x}{6}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)(1 + 4 + 9)$

$E(3X|y = 1) = 7.$

b. Berdasarkan definisi ekpektasi bersyarat diskrit, maka:

$E(2Y^2|x = 1) = \sum_Y 2y^2.\, p''(y|x = 1)$

Fungsi peluang marginal dari *Y* adalah:

$p_1(x) = \sum_{y=1}^{2} \frac{xy}{18}$

$= \left(\frac{x}{18}\right)(1 + 2)$

$= \frac{3x}{18}$

Jadi, $p_1(x) = \frac{x}{6}; \quad x = 1,2,3$

Fungsi peluang bersyarat dari *Y* diberikan *X* = *x* adalah:

$p''(y|x) = \frac{\frac{xy}{18}}{\frac{x}{6}} = \frac{y}{3}; y = 1,2$

Maka:

$E(2Y^2|x = 1) = \sum_{y=1}^{2} 2y^2 \cdot \frac{y}{3} \quad = \left(\frac{2}{3}\right)(1 + 8)$

$E(2Y^2|x = 1) = 6.$

Penentuan ekspektasi bersyarat dari sebuah peubah acak kontinu diberikan peubah acak kontinu lainnya, baik ekspektasi bersyarat dari X diberikan *Y* = *y* maupun ekspektasi bersyarat *Y* diberikan *X* = *x* dijelaskan dalm definisi 5.4 berikut.

Definisi 5.4: Ekspektasi Bersyarat Kontinu

Jika X dan Y adalah peubah acak kontinu, g(x | y) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dai X diberikan Y = y di x dan h(y | x) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari u(X) diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut.

$$E[u(X)|y] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,.\; g(x \mid y)\, dx$$

dan ekspektasi bersyarat dari v(Y) diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut.

$$E[v(Y)|x] = \int_{-\infty}^{\infty} v(y).\; h(y \mid x)\, dy$$

5.3 RATAAN BERSYARAT

Berikut ini akan dijelaskan definisi rataan bersyarat dari sebuah peubah acak diskrit diberikan peubah acak diskrit lainnya, baik rataan bersyarat dari *X* diberikan *Y* = *y* maupun rataan bersyarat di *Y* diberikan *X* = *x*.

Definisi 5.5 Rataan Bersyarat Diskrit

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit, p'(x | y) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberika Y = y di x, dan p''(y | x) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka ekspektasi bersyarat dari X diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut.

$$E(X\,|y) = \sum_{x} x\,.\,p'(x|y)$$

dan ekspektasi bersyarat dari Y diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut.

$$E(Y\,|x) = \sum_{y} y\,.\,p''(y|x)$$

Pemahaman penentuan rataan bersyarat dari peubah acak diskrit diatas diperjelas melalui contoh 5.5.

Contoh 5.5:

Misalnya fungsi peluang gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk:

$$p(x, y) = \left(\frac{1}{72}\right)(x + 2y); x = 0,1,2,3\ dan\ y = 0,1,2,3$$

Hitung $E(X\ |y = 1)$ dan $E(Y\ |x = 2)$.

Penyelesaian:

a. Berdasarkan definisi rataan bersyarat diskrit, maka :

$E(X\ |y) = \sum_x x\ .\ p'(x \mid y)$

Kita akan menentukan dahulu fungsi peluang bersyarat $p'(x \mid y)$. Sebelumnya kita akan menentukan fungsi peluang marginal dari *Y*. Berdasarkan definisi peluang marginal diskrit, maka:

$p_2(y) = \sum_x\ p(x, y))$

$= \sum_{x=0}^{3} \frac{1}{72}(x + 2y)$

$= \left(\frac{1}{72}\right)[2y + (1 + 2y) + (2 + 2y)\ + (3 + 2y)]$

$= \frac{1}{72}(6 + 8y)$

Jadi: $p_2 y = \frac{1}{72}(6 + 8y);\ \ y = 0,1,2,3$

Berdasarkan definisi fungsi peluang bersyarat, maka:

$p'(x \mid y) = \frac{p(x,y)}{p_2(y)}$

$= \frac{\frac{1}{72}(x+2y)}{\frac{1}{72}(6+8y)}$

$p'(x \mid y) = \frac{(x+2y)}{(6+8y)}$; $x = 0,1,2,3$ dan $y = 0,1,2,3$

Sehingga:

$E(X|y) = \sum_{x=0}^{3} x \cdot \frac{(x+2y)}{(6+8y)}$

$= \frac{1}{6+8y}[(0)(2y) + (1)(1 + 2y) + (2)(2 + 2y) + (3)(3 + 2y)]$

$= \frac{14+12y}{6+8y}$

$E(X|y) = \frac{7+6y}{3+4y}$

Akibatnya: $E(X|y=1)=\frac{13}{7}$.

b. Berdasarkan definisi rataan bersyarat diskrit, maka :

$E(Y\ |x)=\sum_y y\ .\ p''(y\mid x)$

Kita akan menentukan dahulu fungsi peluang bersyarat $p''(y\mid x)$ namun sebelumnya kita akan menentukan fungsi peluang marginal dari *X*. Berdasarkan definisi peluang marginal diskrit, maka:

$p_1(x)=\sum_y\ p(x,\ y)$

$=\sum_{y=0}^{3}\frac{1}{72}(x+2y)$

$=\left(\frac{1}{72}\right)[x+(x+2)+(x+4)\ +(x+6)]$

$=\left(\frac{1}{72}\right)(4x+12)$

Jadi: $p_1x=\frac{1}{72}(4x+12);\ \ x=0{,}1{,}2{,}3$

Berdasarkan definisi fungsi peluang bersyarat, maka:

$p''(y\mid x)=\frac{p(x,y)}{p_1(x)}$

$=\frac{\frac{1}{72}(x+2y)}{\frac{1}{72}(4x+12)}$

$p''(y\mid x)=\ \frac{(x+2y)}{(4x+12)}$; $x=0{,}1{,}2{,}3$ dan $y=0{,}1{,}2{,}3$

Sehingga:

$E(Y|x)=\sum_{y=0}^{3}(y)\cdot\frac{(x+2y)}{(4x+12)}$

$=\frac{1}{4x+12}[(0)(x)+(1)(x+2)+(2)(x+4)+(3)(x+6)]$

$=\frac{6x+28}{4x+12}$

$E(Y|x)=\frac{3x+14}{2x+6}$

Akibatnya: $E(Y|x=2)=2$.

Defenisi 5.6: Rataan Bersyarat Kontinu

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, g(x | y) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan h(y | x) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka rataan dari X diberikan Y = y dirumuskan sebagai berikut.

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, g(x\,|y)\; dx$$

dan rataan bersyarat dari Y diberikan X = x dirumuskan sebagai berikut.

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \,.\, h(y\,|x)\; dy$$

Berikut ini akan dijelaskan beberapa dalil yag berkaitan dengan rataan bersyarat.

Dalil 5.1: Ekspektasi Rataan Bersyarat

$$E[E(X \mid y)] = E(X)$$

$$E[E(Y \mid x)] = E(Y)$$

Bukti:

Pembuktian dilakukan terhadap peubah acak kontinu.

Berdasarkan definisi rataan besyarat kontinu, maka:

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, g(x\,|y)\; dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, \frac{f(x,y)}{f_2(y)}\; dx$$

Ternyata $E(X|y)$ merupakan fungsi dari Y, maka:

$$E[E(X \mid y)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|y) \,.\, f_2(y)\; dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, \frac{f(x,y)}{f_2(y)}\; dx \right\} . f_2(y)\; dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\, f(x,y)\; dx \right\} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x . \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\; dy \right\} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \,.\; f_1(x)\; dx$$

$E[E(X \mid y)] = E(X)$ (terbukti).

Dalil 5.2:

Jika dua peubah acak X dan Y saling bebas, maka:

$E(X \mid y) = E(X)$

$E(Y \mid x) = E(Y)$

Bukti:

Pembuktiannya dilakukan terhadap peubah acak diskrit.

Berdasarkan definisi rataan bersyarat diskrit, maka:

$E(X \mid y) = \sum_x x\,.\; p'(x \mid y)$

$= \sum_x x\,.\; \frac{p(x,y)}{p_2(y)}$

$= \sum_x x\,.\; \frac{p_1(x).p_2(y)}{p_2(y)}$, karena *X* dan *Y* saling bebas.

$= \sum_x x\,.\, p_1(x)$

$E(X \mid y) = E(X)$ (terbukti).

5.4 PERKALIAN DUA MOMEN

Misalnya kita mempunyai dua peubah acak, baik diskrit maupun kontinu. Kemudian kita bisa menghitung momen dari masing-masing peubah acak, baik momen sekitar pusat maupun momen sekitar rataan. Selain itu, kita sebenarnya bisa juga menentukan perkalian dua momen, yaitu perkalian dua momen sekitar pusat dan perkalian dua momen sekitar rataaan.

Definisi 5.7: Perkalian Dua Momen Diskrit

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit p(x, y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari X dan Y di (x, y), μ_x *adalah rataan dari X, dan* μ_y *adalah rataan dari y, maka perkalian momen sekitar pusat ke-r dan ke-s dari X dan Y (dinotasikan dengan* $\mu'_{r,s}$ *) dirumuskan sebagai berikut*

$$\mu'_{r,s} = E(X^r Y^s) = \sum_x \sum_y x^r y^s.\; p(x,y)$$

dan perkalian momen sekitar rataan ke-r dank e-s dari X dan Y (dinotasikan dengan $\mu_{r,s}$*) dirumuskan sebagai berikut :*

$$\mu_{r,s} = E[(X-\mu_x)^r(Y-\mu_y)^s] = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)^r(y-\mu_y)^s . p(x,y)$$

Dengan r= 0, 1, 2, 3,.. dan s = 0, 1, 2, 3, ...

Contoh 5.6

Misalnya fungsi peluang gabungan dari *X* dan *Y* berbentuk :

$$p(x,y) = \frac{xy^2}{30}; x = 1, 2, 3 \; dan \; y = 1, 2$$

Hitunglah $\mu_{2,2}{}'$.

Hitunglah $\mu_{1,2}{}'$.

Penyelesaian:

a. Berdasarkan perumusan perkalian momen sekitar pusat diskrit, maka:

$$\mu'_{2,2} = E(X^2Y^2)$$

$$= \sum_x \sum_y x^2y^2.\; p(x,y)$$

$$= \sum_x \sum_y x^2y^2. \tfrac{1}{30}xy^2$$

$$= \tfrac{1}{30}\{(1)(1) + (1)(16) + (8)(1) + (8)(16) + (27)(1) + (27)(16)\}$$

$$= \tfrac{1}{30}(1 + 16 + 8 + 128 + 27 + 432)$$

$$\mu'_{2,2} = \tfrac{612}{30} = 20,4$$

b. Berdasarkan perumusan perkalian momen sekitar rataan diskrit, maka :

$$\mu'_{1,2} = E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)^2\right]$$

$$= \sum_x \sum_y (x-\mu_x)(y-\mu_y)^2 . p(x,y)$$

Kita akan menghitung dahulu μ_x dan μ_y.

i. Berdasarkan definisi rataan diskrit, maka:

$$\mu_x = \sum_x x . p_1(x)$$

$$= \sum_x x. (\sum_y x . p(x,y))$$

$$= \sum_{x=1}^{3} x \left(\sum_{y=1}^{2} \tfrac{1}{30}xy^2\right)$$

$$= \sum_{x=1}^{3} x \tfrac{1}{30}(x)(1+4))$$

$$= \left(\tfrac{1}{6}\right) \sum_{x=1}^{3} x^2$$

$$= \tfrac{1}{6}(1 + 4 + 9)$$

$\mu_x = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

ii. Berdasarkan definisi rataan diskrit, maka:

$\mu_y = \sum_y y \,.\, p_2(x)$

$= \sum_y y.(\sum_x y \,.\, p(x,y))$

$= \sum_{y=1}^{2} y\,(\sum_{x=1}^{3} \frac{1}{30} xy^2)$

$= \sum_{y=1}^{2} y \frac{1}{30}(y^2)(1+2+3))$

$= \sum_{y=1}^{2} \frac{1}{5} y^3$

$= (\frac{1}{5})(1+8)$

$\mu_y = \frac{9}{5}$

Jadi: $\mu_{1,2} = \sum_{x=1}^{3} \sum_{y=1}^{2} \left(x - \frac{7}{3}\right)(y - \frac{9}{5})^2 . \frac{1}{30} xy^2$

$= \left(\frac{1}{30}\right)\left\{\left(1-\frac{7}{3}\right)\left(1-\frac{9}{5}\right)^2 (1)(1) + \left(1-\frac{7}{3}\right)\left(2-\frac{9}{5}\right)^2 (1)(4) + \left(2-\frac{7}{3}\right)\left(1-\frac{9}{5}\right)^2 (2)(1) + \left(2-\frac{7}{3}\right)\left(2-\frac{9}{5}\right)^2 (2)(4) + \left(3-\frac{7}{3}\right)\left(1-\frac{9}{5}\right)^2 (3)(1) + \left(3-\frac{7}{3}\right)\left(2-\frac{9}{5}\right)^2 (3)(4)\right\}$

$= \left(\frac{1}{30}\right)\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{16}{25}\right) + \left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{25}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{32}{25}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{8}{25}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{48}{25}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{12}{25}\right)\right\}$

$= \left(\frac{1}{30}\right)(-\frac{64}{75} - \frac{16}{75} - \frac{32}{75} - \frac{8}{75} + \frac{96}{75} + \frac{24}{75})$

$= \left(\frac{1}{30}\right)\left(\frac{0}{75}\right)$

$\mu_{1,2} = 0$

Definisi 5.8 : Perkalian Dua Momen Kontinu

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, f(x, y) adalah nilai fungsi densitas gabungan dari X dan Y di (x, y), μ_x *adalah rataan dari X, dan* μ_y *adalah rataan dari Y, maka perkalian momen sekitar pusat ke-r dan ke-s dari X dan Y (dinotasikan dengan* $\mu'_{r,s}$ *) dirumuskan sebagai berikut:*

$$\mu'_{r,s} == E(X^r Y^s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s .\ f(x,y) dx\, dy$$

dan perkalian momen sekitar rataan ke-r dan ke-s dari X dan Y (dinotasikan dengan $\mu_{r,s}$) dirumuskan sebagai berikut :

$$\mu_{r,s} = E\left[(X-\mu_x)^r \left(Y-\mu_y\right)^s\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^r \left(y-\mu_y\right)^s .\ f(x,y) dx\, dy$$

dengan r = 0. 1, 2, 3,..... dan s = 0, 1, 2, 3,.......

5.5 KOVARIANS

Berikut ini akan di jelaskan sebuah ukuran yang merupakan hal khusus dari perkalian dua momen, yaitu kovarians.

Definisi 5.9 : Kovarians

Perkalian momen sekitar rataan ke-1 dan ke-1 dari peubah acak X dan Y disebut kovarians dari X dan Y dan dinotasikan dengan Kov(X, Y) atau σ_{xy} dengan

$$Kov(X, Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)].$$

Perhitungan nilai kovarians dari peubah acak kontinu ditentukan berdasarkan definisi 5.10.

Definisi 5.10: Kovarians Diskrit

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit p(x, y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari X dan Y di (x, y), μ_x adalah rataan dari X, dan μ_y adalah rataan dari Y, maka nilai kovarians dari X dan Y dirumuskan sebagai berikut:

$$Kov(X,Y) = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)\left(y-\mu_y\right).p(x,y)$$

Perhitungan nilai kovarians dari peubah acak kontinu ditentukan berdasarkan definisi 5.11.

Definisi 5.11: Kovarians Kontinu

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu, f(x, y) adalah nilai fungsi densitas gabungan dari X dan Y di (x, y), μ_x *adalah rataan dari X, dan* μ_y *adalah rataan dari Y, maka nilai kovarians dari X dan Y dirumuskan sebgai berikut:*

$$Kov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y).f(x,y)\,dx\ dy$$

Perumusan lain nilai kovarians dari X dan Y, baik diskrit maupun kontinu dapat dilihat dalam dalil 5.3.

Dalil 5.3: Perumusan Kovarians Umum

$$Kov(X,Y) = \mu'_{1,1} - \mu_x\mu_y$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 7.9, maka:

$Kov(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$

$= E(XY - X.\mu_x - \mu_x.Y + \mu_x\mu_y)$

$= E(XY - E(X).\mu_x - \mu_x.E(Y) + \mu_x\mu_y)$

$= E(XY) - \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y$

$= E(XY) - \mu_x$

$Kov(X,Y) = \mu'_{1,1} - \mu_x\mu_y$ (terbukti).

5.6 VARIANS BERSYARAT

Penentuan varians bersyarat dari sebuah peubah acak diberikan peubah acak lainnya, baik diskrit maupun kontinu dalam definisi 5.12.

Definisi 5.12: Varians Bersyarat Umum

Jika X adan Y adalah dua peubah acak, baik diskrit maupun kontinu maka varians bersyarat dari X diberikan Y = y didefinisika sebagai:

$$Var(X|y) = E[\{X - E(X|y)\}^2|y]$$

$$atau$$

$$Var(X|y) = E(X^2|y) - [E(X|y)]^2$$

dan varians bersyarat dari Y diberikan X = x didefinisikan sebagai:

$$Var(Y|x) = E[\ \{Y - E(Y|x)\}^2|x\ ]$$

$$atau$$

$$Var(Y|x) = E(Y^2|x) - [E(Y|x)]^2$$

Penentuan varians bersyarat dari sebuah peubah acak diskrit diberikan peubah acak diskrit lainnya, bai varians bersyarat dari *X* diberikan *Y* = *y* maupun varians bersyarat dari *Y* diberikan *X* = *x* dijelaskan dalam Definisi 5.13.

Definisi 5.13: Varians Bersyarat Diskrit

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit , p'(x|y) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan p"(y | x) adalah nilai fungsi peluang bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka varians bersyarat dari X diberikan Y = y dirumuskan sebagai:

$$Var(X|y) = \sum_x [x - E(X\ |y)]^2 . p'(x|y)$$

Dan varians bersyarat dar Y diberikan X = x dirumuskan sebagai:

$$Var(Y|x) = \sum_y [y - E(Y\ |x)]^2 . p''(y|x)$$

Penentuan varians bersyarat dari sebuah peubah acak kontinu diberikan peubah acak kontinu lainnya, baik varians bersyarat dari *X* diberikan *Y* = *y* maupun varians bersyarat dari *Y* diberikan *X* = *x* dijelaskan dalam Definisi 5.14.

Definisi 5.14: Varians Bersyarat Kontinu

Jika X dan Y adalah dua buah peubah acak kontinu, g(x | y) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari X diberikan Y = y di x, dan h(y | x) adalah nilai fungsi densitas bersyarat dari Y diberikan X = x di y, maka varians bersyarat dari X diberikan Y = y dirumuskan sebagai:

$$Var(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X\ |y)]^2 . g(x|y)\ dx$$

Dan varians bersyarat dari Y diberikan X = x dirumuskan sebagai:

$$Var(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y\,|x)]^2 . h(y|x)\ dy$$

5.7 FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN GABUNGAN

Fungsi pembangkit momen gabungan dapat didefinisikan sebagai fungsi pembangkit momen yang diperoleh berdasarkan fungsi densitas gabungan dari dua peubah acak.

Fungsi pembangkit momen gabungan dari dua peubah acak diskrit dijelaskan dalam Definisi 5.15.

Definisi 5.15: Fungsi Pembangkit Momen Gabungan Umum

Jika X dan Y adalah dua peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y (dinotasikan dengan $M(t_1, t_2)$) *didefinisikan sebagai :*

$$M(t_1, t_2) = E[\exp(t_1 X + t_2 Y)]$$

Untuk $-h_1 < t_1 < h_1$, $-h_2 < t_2 < h_2$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$.

Fungsi pembangkit momen gabungan dari dua peubah acak diskrit dijelaskan dalam Definisi 5.16.

Definisi 5.16: Fungsi Pembangkit Momen Gabungan Diskrit

Jika X dan Y adalah dua peubah acak diskrit dengan p(x, y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari X dan Y di (x, y), maka fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y didefinisikan sebagai :

$$M(t_1, t_2) = \sum_x \sum_y e^{t_1 x + t_2 y}\ . p(x, y)$$

Fungsi pembangkit momen gabungan dari dua peubah acak kontinu dijelaskan dalam Definisi 5.17.

Definisi 5.17: Fungsi Pembangkit Momen Gabungan Kontinu

Jika X dan Y adalah dua peubah acak kontinu dengan f(x, y) adalah nilai fungsi peluang gabungan dari X dan Y di (x, y), maka fungsi pembangkit momen gabungan dari X dan Y didefinisikan sebagai :

$$M(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1 x + t_2 y} . f(x, y)\ dx\ dy$$

Berdasarkan fungsi pembangkit momen gabungan dari *X* dan *Y*, kita dapat menentukan fungsi pembangkit momen masing-masing dari X dan Y yang dinamakan *fungsi pembangkit momen marginal dari X dan fungsi pembangkit momen marginal dari Y.*

Fungsi pembangkit mome marginal dari X diperoleh dari pembangkit momen gabungan dengan mensubtitusikan $t_2 = 0$, sehingga:

$$M(t_1, 0) = M(t_1) = E[\exp(t_1 X)]$$

Penentuan momen-momen dari peubah acak X berdasarkan fungsi pembangkit momennya digunakan rumus sebagai berikut.

$$\mu_x = E(X) = \frac{\partial M(t_1, 0)}{\partial t_1}\ ]_{t_1=0} = \frac{\partial M(0,0)}{\partial t_1}$$

$$E(X^2) = \frac{\partial^2 M(t_1, 0)}{\partial {t_1}^2}\ ]_{t_1=0} = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial {t_1}^2}$$

Adapun penentuan varians dari *X* digunakan rumus sebagai berikut:

$$Var(X) = \sigma_x^2 = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial {t_1}^2} - \left[\frac{\partial M(0,0)}{\partial t_1}\right]^2$$

Fungsi pembangkit momen marginal dari Y diperoleh fungsi pembangkit momen gabungan dengan mensubtitusikan $t_1 = 0$, sehingga:

$$M(0, t_2) = M(t_2) = E[\exp(t_2 Y)]$$

Penentuan momen-momen dari peubah acak Y berdasarkan fungsi pembangkit momennya digunakan rumus sebagai berikut:

$$\mu_y = E(Y) = \frac{\partial M(0, t_2)}{\partial t_2}\ ]_{t_2=0} = \frac{\partial M(0,0)}{\partial t_2}$$

$$E(Y^2) = \frac{\partial^2 M(0, t_2)}{\partial {t_2}^2}\ ]_{t_1=0} = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial {t_2}^2}$$

Adapun penentuan varians *Y* digunakan rumus sebagai berikut.

$$Var(Y) = \sigma_y^2 = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial {t_2}^2} - \left[\frac{\partial M(0,0)}{\partial t_2}\right]^2$$

Adapun nilai $E(XY)$ ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$E(XY) = \frac{\partial^2 M(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}]_{t_1=t_2=0} = \frac{\partial^2 M(0,0)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

BAB VI
BEBERAPA DISTRIBUSI KHUSUS DISKRIT

6.1 Distribusi Bernoulli

Apabila sebuah eksperimen mempunyai dua hasil yang muncul, seperti "sukses" dan "gagal", dengan masing-masing peluangnya p dan (1-p),maka peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal akan berdistribusi Bernoulli.

Defenisi 6.1: FUNGSI PELUANG BERNOULLI

Perubahan acak X dikatakan berdistribusi Bernoulli, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = p^x\,(1-p)^{1-x}\;: x = 0{,}1$$

Perubahan acak X yang berdistribusi Bernuolli dikatakan juga peubah acak Bernuolli. Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi Bernuolli adalah *B*(x:1,*p*), artinya peubah acak X berdistribusi Bernuolli dengan peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal dinyatakan dengan *x*,banyak eksperimen yang dillakukan satu kali, dan peluang peluang terjadinya peristiwa yang diperhatikan, baik sukses maupun gagal sebesar *p*.

Sebuah eksperimen dikatakan mengikuti distribusi Bernuolli, jika eksperimen itu memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

1. Eksperimenya terdiri atas dua peristiwa, yaitu peristiwa yang diperhatikan (sering disebut peristiwa sukses) dan peristiiwa yang tidak diperhatikan (sering disebut peristia yang gagal).
2. Eksperimenya hanya dilakukan sekali saja.

   Rataan, Varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Bernuolli bisa dilihat dalam Dalil 6.1

Dalil.6.1 PARAMETER DISTRIBUSI BERNUOLLI

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi Bernuolli adalah sebagai berikut.

1. $\mu = p$

2. σ^2=*p(1-p)*

3. $M_x(t) = (1-p) + p.e^t\,; t \in R$

Bukti:

1. Berdasarkan definisi rataan diskrit, maka:

$\mu = E(X) = \sum_x x \ \ p(x)$

$\quad = \sum_{x=0}^{1} x \ \ . p^x(1-p)^{1-x}$

$\quad = 0 + p^1(1-p)^{1-1}$

$\mu = E(X) = p$ (terbukti)

2. Berdasarkan definisi varians dikrit, maka :

$a^2 \ = Var(X) = \sum_x (x-\mu)^2 . p(x)$

$\quad = \sum_{x=0}^{1}(x-p)^2 \ . \ p^x(1-p)^{1-x}$

$\quad = (0-p)^2 \ (p^0)(1-p) + (0-p)^2 \ (p^1)(0-p)^0$

$\quad = p^2 - \ p^3 + p - 2p^2 - \ p^3$

$\quad = p - p^2$

$a^2 \ = Var(X) = p(1-P)$ (terbukti)

3. Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen dikrit, maka :

$M_{x(}(t) \ = \sum_x (x-\mu)^2 . p(x)$

$\quad = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} \ . \ p^x(1-p)^{1-x}$

$\quad = (e^0) \ (p^0)(1-p)^1 + (e^t) \ (p^1)(1-p)^0$

$M_{x(}(t) \ = (1-P) + p \ . e^t$ (terbukti)

Contoh 6.1:

Apakah artinya $Y \sim B\left(y; 1, \frac{1}{4}\right)$? Kemudian tuliskan bentuk fungsi peluangnya.

Penyelesaian:

$Y \sim B\left(y; 1, \frac{1}{4}\right)$ artinya peubah acak *Y* mengikuti distribusi Bernoulli dengan pluang peristiwa sukses sebesar $\frac{1}{4}$ dan banyak peristiwa sukses ada *y*.

Fungsi peluang dari Y adalah:

$$p(y) = P(Y = y) = \left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{1}{3}\right)^{1-y} \ ; y = 0{,}1$$

Contoh 6.2:

Jika $X \sim B(x; 1, p)$, maka tentukan μ dan μ_2 berdasarkan hasil fungsi pembangkit momennya.

Penyelesaian:

Fungsi pembangkit momen dari X adalah:

$M_X(t) = (1-p) + \ p \, . \, e^t; t \in \mathfrak{R}$

- $\mu = \mu_1{}' = M_x'(t)]$

  $= p \, . \, e^t]_{t=0}$

  $\mu = \mu_1{}' = p$

- $\mu_2 = \mu_2{}' - (\mu)^2$

  $M_X{}''\ (t)\ ]_{t=0} - \ p^2$

  $= p \, . \ e^t \ ]_{t=0} - p^2$

  $= p - p^2$

  $\mu_2 = p(1-p)$

Contoh 6.3:

Misalnya $Y \sim B(y; 1, \frac{1}{4})$

Tentukan fungsi distribusi dari Y.

Penyelesaian:

Fungsi peluang dari Y adalah:

$$p(y) = P(Y = y) = \left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{3}{4}\right)^{1-y} ; y = 0{,}1$$

Jadi: $p(0) = \frac{3}{4}$

$p(1) = \frac{1}{4}$

Distribusi peluang dari Y adalah:

y	0	1
$p(y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Fungsi distribusi dari Y adalah:

Untuk y < 0:

F(y) = 0

Untuk 0 ≤ y < 1:

F(y) = $\sum_{t \le y} p(t) = \sum_{t \le 0} p(t) = p(0)$

F(y) = $\frac{3}{4}$

Untuk y $\geq$ 1:

P(y) = $\sum_{t \leq y} p(t) = \sum_{t \leq 1} p(t)$

$= p(0) + p(1)$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

P(y) = 1

Sehingga: $F(y) = 0; y < 0$

$= \frac{3}{4};\ 0 \leq y < 1$

$= 1;\ y \geq 1.$

6.2 Distribusi Binomial

Misalnya kita melakukan suatu eksperimen yang hanya menghasilkan dua peristiwa, seperti peristiwa sukses (S) dan peristiwa gagal (G).

Peluang terjadinya peristiwa S, P(S), sebesar p dan peluang terjadinya peristiwa G, P(G), sebesar $1 - p$.

Kemudian eksperimen itu di ulang sampai n kali secara bebas. Dari n kali pengulangan itu, peristiwa S terjadi sebanyak x kali dan sisanya $(n - x)$ kali terjadi peristiwa G. Kita akan menghitung besar peluang bahwa banyak peristiwa sukses dalam eksperimen itu sebanyak x kali.

Dalam hal ini, salah satu susunan dari pengulangan eksperimen sampai n kali itu adalah:

$$\underbrace{S\ S\ S \dots S}_{x \text{ kali}}\ \underbrace{G\ G\ G \dots G}_{(n-x) kali}$$

Karena setiap pengulangan bersifat bebas, P(S) = p dan P(G) = $1 - p$ berharga tetap untuk setiap pengulangan percobaan, maka besar peluang dari peristiwa susunan di atas adalah:

P(S S S . . . S G G G . . . G) = P (S) . P(S) . P(S) . . . P(S) . P(G) . P(G) . P(G) . . . P(G)

= (p) (p) (p) . . . (p) $(1-P)\ (1-P)\ (1-P)\ .\ .\ .\ (1-P)$

= $P^x(1-p)^{n-x}$

Karena banyak susunan keseluruhan peristiwa S terjadi ada $\binom{n}{x}$ cara, maka peluang bahwa peristiwa S terjadi dalam x kali adalah:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 -)^{n-s}$$

Berdasarkan uraian di atas, kita peroleh defenisi distribusi binomial berikut.

Definisi 6.2: FUNGSI PELUANG BINOMIAL

Peubah acak X dikatakan berdistribusi binomial, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = X) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; x = 0,1,2,3 \dots, n$$

Peubah acak X yang berdistribusi binomial dikatakan juga *peubah acak binomial.* Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi binomial adalah $B(x; n, p)$, artinya peubah acak X berdistribusi binomial dengan banyak pengulangan eksperimen sampai n kali, peluang terjadi peristiwa sukses sebesar *p*, dan banyak peristiwa sukses terjadi ada *x*.

Sebuah eksperimen dikatakan mengikuti distribusi binomial, jika eksperimen itu memenuhi sifat-sifat sebagai berikut.

1. Eksperimennya terdiri atas dua peristiwa, seperti sukses dan gagal.
2. Eksperimennya diulang beberapa kali dan di tentukan banyak pengulangannya
3. Peluang terjadinya peristwa sukses dan gagal pada setiap pengulangan eksperimen bersifat bebas
4. Setiap pengulangan eksperimen bersifat bebas

Rataan, varians dan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial bisa di lihat dalam Dalil 6.2

Dalil 6.2: PARAMETER DISTRIBUSI BINOMIAL

Rataan,varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial adalah sebagia berikut:

1. $\mu = np$
2. $\sigma^2 = np(1-p)$
3. $M_x(t) = [(1-p) + p.e^t]^n; t \in \Re$

$$M_X(\mathrm{t}) = [(1-p) + p \;.\; e^1]^n \quad \text{(terbukti)}$$

Pemahaman uraian tentang distribusi binomial diperjelas melalui Contoh 8.4

Contoh 8.4

Apakah artinya $Y - B\left(y; 6, \frac{1}{4}\right)$? Kemudian tuliskan bentuk fungsi peluangnya.

Penyelesaian:

$Y \sim B(y; 6, \frac{1}{4})$ artinya peubah acak Y mengikuti distribusi binomial dengan banyak pengulangan ekperimennya sampai 6 kali, peluang terjadinya peristiwa sukses sebesar $\frac{1}{4}$ dan banyak peristiwa sukses y. Fungsi peluang dari Y adalah:

$$P(y) = \binom{6}{y} \left(\frac{1}{4}\right)^y \left(\frac{3}{4}\right)^{6-y} \quad ; y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Contoh6.5:

Misalnya kita mengundi sebuah dadu yang seimbang sebanyak 8 kali. Hitung peluang bahwa munculnya mata dadu 5 paling sedikit 6 kali.

Penyelesaian:

Misalnya X menyatakan banyak mata dadu 5 yang muncul.

Dalam hal ini, n = 8 dan p = $\frac{1}{6}$.

Fungsi peluang dari X adalah:

$$P(x) = \binom{8}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{8-x} \quad ; x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 8$$

Jadi: $P(X \geq 6) = P(X = 6, 7, 8)$

$$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$$

$$= \binom{8}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{8}{7} \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right) + \binom{8}{8} \left(\frac{1}{6}\right)^8 \left(\frac{5}{6}\right)^0$$

$$= \frac{700}{1.679.616} + \frac{40}{1.679.616} + \frac{1}{1.679.616}$$

$$P(X \geq 6) = \frac{741}{1.679.616} = 0{,}00044$$

Contoh 6.6

Misalnya fungsi pembangkit momen dari X berbentuk:

$$M_x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \, . \; e^1\right)^5 \; ; t \in R$$

Hitung $P(X = 4)$ dan $P(0 \le X \le 1)$.

Penyelesaian:

Fungsi pembangkit momen dari X merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial dengan $n = 5$ dan $p = \frac{1}{2}$, sehingga fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \; ; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

a. $P(X = 4) = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$

b. $P(0 \le X \le 1) = \sum_{x=0}^{1} \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left\{\binom{5}{0} + \binom{5}{1}\right\} = \left(\frac{1}{32}\right)(1 + 5)$

$P(0 \le X \le 1) = \frac{6}{32}$

6.3 DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Misalnya sebuah populasi suatu barang yang berukuran N terdiri atas k buah barang baik dan sisanya $(N - k)$ buah barang rusak. Kemudian diambil sebuah sampel acak berukuran $n(n \le N)$ secara sekaligus , ternyata dari sampel acak itu berisi x buah barang baik dan sisanya $(n - x)$ buah barang rusak. Dalam hal ini, kita akan menghitung peluang bahwa dari sampel acak itu akan berisi x buah barang baik.

Banyak susunan yang mungkin untuk mendapatkan x buah barang baik dari k buah barang baik ada $\binom{k}{x}$cara yang berbeda.

Banyak susunan yang mungkin untuk mendapatkan $(n - x)$ buah barang rusak dari $(N\text{-}k)$ buah barang rusak ada $\binom{N \quad k}{n \quad x}$cara yang berbeda.

Banyak susunan yang mungkin untuk mendaptkan n buah barang dari N buah barang $\binom{N}{n}$ cara yang berbeda.

Maka peluang bahwa sampel acak itu akan berisi x buah barang baik adalah:

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N - \quad k}{n - \quad x}}{\binom{N}{n}}$$

Berdasarkan uraian di atas, kita peroleh definisi distribusi hipergeometrik berikut.

Definisi 6.3 : FUNGSI PELUANG HIPERGEOMETRIK

Peubah acak X dikatakan berdistribusi hipergeometrik, jika dan hanya jika fungsi peluangnya berbentuk:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-\quad k}{n-\quad x}}{\binom{N}{n}}\ ; x = 0,1,2,3, \dots, n$$

Peubah acak X yang berdistribusi hipergeometrik disebut juga *peubah acak hipergeometrik.*

Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi hipergeometrik adalah *X – H(x;N, n, k)*, artinya peubah acak *X* berdistribusi hipergeometrik dengan banyak barang baik dari sampel acak sebanyak *x*, banyak barang dari populasi sebanyak *N*, banyak barang dari sampel acak sebanyak *n*, dan banyak barang baik dari populasi sebanyak *k*.

Dalil 8.6: PARAMAETER DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK

Rataan dan varians dari distribusi hipergeometrik adalah sebagai berikut.

1. $\mu = \frac{nk}{N}$
2. $\sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$

Contoh 8.12:

Misalnya Sandy mempunyai setumpukan kartu bridge yang berjumlah 52 buah, dengan 26 buah kartu berwarna merah dan 26 kartu berwarna hitam.

Jika Sandy mengambil 4 buah kartu sekaligus dari setumpukan kartu itu, maka berapa peluang bahwa dari 4 kartu yg terambil itu ada 2 kartu yang berwarna hitam?

Penyelesaian:

Dalam hal ini: N = Banyak kartu bridge keseluruhan =52

$k =$ Banyak kartu hitam pada setumpuk kartu bridge =26

$n =$ Banyak kartu yang diambil secara sekaligus =4

$X =$ Banyak kartu hitam yang terdapat dalam sempel

Jadi besar peluang yang dicari adalah :

$$P(X = 2) = \frac{\binom{26}{2}\binom{26}{2}}{\binom{52}{4}}$$

$$= \frac{\left[\frac{(26)(25)}{(1)(2)}\right]\left[\frac{(26)(25)}{(1)(2)}\right]}{\left[\frac{(52)(51)(50)(49)}{(1)(2)(3)(4)}\right]}$$

$$= \frac{105.625}{270.725}$$

$$P(X = 2) = 0{,}3902.$$

BAB VII
BEBERAPA DISTRIBUSI KHUSUS KONTINU

7.1 Distribusi Seragam

Peubah acak yang berdistribusi seragam ini mempunyai fungsi densitas berupa konstanta yang didefinisikan atas sebuah interval nilai peubah acaknya. Jadi fungsi densitas seragam ini mempunyai nilai yang sama sepanjang interval nilai yang diberikan.

Definisi 7.1: FUNGSI DENSITAS SERAGAM

Peubah acak X dikatakan bedistribusi seragam, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha};\ \alpha < x < \beta$$
$$= 0\ ;x\ lainnya$$

Peubah acak X yang berdistribusi seragam dikatakan juga peubah *acak seragam.* Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi seragam adalah $S(x;\alpha\ ,\beta)$, artinya peubah acak *X* berdistribusi seragam dengan parameter $\alpha\ dan\ \beta$.

Peubah acak *X* yang berdistribusi seragam dengan parameternya $\alpha\ dan\ \beta$ bisa ditulis juga sebagai:

$$X \sim S(\alpha\ ,\ \beta)$$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi seragam bisa dilihat dalam Dalil 7.1.

Dalil 7.1:

Rataan varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi seragam dirumuskan sebagai berikut.

1. $\mu = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$
2. $\sigma^2 = \left(\frac{1}{12}\right)(\beta-\alpha)^2$
3. 3. $M_X(t) = \frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{t(\beta-\alpha)}\ ;t \neq 0$

   $= 1; t = 0$

Bukti:

1. Berdasarkan definisi rataan kontinu, maka

$$\mu = \mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,.\,f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} x\,.\,f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} x\,.\,f(x)dx + \int_{\beta}^{\infty} x\,.\,f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} x\ .\,0\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} x\ .\frac{1}{\beta-\alpha}dx + \int_{\beta}^{\infty} x\,.\,0\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{2}x^2\Big]_{\alpha}^{\beta}\right) + 0$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)}{\beta-\alpha}$$

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(terbukti)$$

2. Berdasarkan definisi varians, maka:

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E(X)}]^2$

dengan:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,.\,f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} x^2.\ f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} x^2\,.\,f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\infty} x^2\,.\,f(x)\ dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} x^2\,.\,0\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} x^2.\frac{1}{\beta-\alpha}dx + \int_{\beta}^{\infty} x^2.\,0\,dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{3}x^3\Big]_{\alpha}^{\beta}\right) + 0$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)}{\beta-\alpha}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \left(\frac{1}{3}\right)(\beta^2 + \alpha\,\beta + \alpha^2)$$

Jadi: $Var(X) = \left(\frac{1}{3}\right)(\beta^2 + \alpha\,\beta + \alpha^2) - \left(\frac{1}{4}\right)(\alpha+\beta)^2$

$$Var(X) = \left(\frac{1}{12}\right)(\beta^2 - 2\,\alpha\,\beta + \alpha^2)$$

$Var(X) = \left(\frac{1}{12}\right)(\beta-\alpha)^2$ (terbukti)

3. Berdasarkan definisi fungsi pembangkit momen kontinu, maka:

$$\mathcal{M}_{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\ .\,f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} e^{tx} \, . f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} e^{tx}. f(x)dx + \int_{\beta}^{\infty} e^{tx}. f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} e^{tx} \, . 0 \, dx + \int_{\alpha}^{\beta} e^{tx}. \frac{1}{\beta - \alpha} dx + \int_{\beta}^{\infty} e^{tx}. 0 \, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\frac{1}{t} e^{tx} \Big]_{x=\alpha}^{\beta} \right) + 0$$

$$\mathcal{M}_{X(t)} = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)}; t \neq 0$$

Untuk t=0 digunakan dalil L'Hospital, yaitu:

$$\lim_{t \to 0} M_x(t) = \lim_{t \to 0} \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\beta \,. e^{\beta t} - \alpha \,. e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)} = 1$$

$$= \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$\lim_{t \to 0} M_x(t) = 1$$

Jadi: $M_x(t) = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{t(\beta - \alpha)}; t \neq 0$

$= 1; t = 0$ (terbukti)

Pemahaman uraian tentang distribusi seragam diperjelas melalui Contoh 7.1 dan 7.2.

Contoh 7.1:

Apakah artinya $Y \sim S(1,3)$? Kemudian tuliskan bentuk fungsi derisitasnya.

Penyelesaian:

$Y \sim S(1,3)$ artinya peubah acak Y berdistribusi seragam dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\beta = 3$

Fungsi densitas dari Y berbentuk:

$$f(y) = \frac{1}{2}; 1 < y < 3$$

$= 0; y$ lainnya

Contoh 7.2:

Misalnya fungsi densitas X berbentuk:

$$g(x) = \frac{1}{4}; 0 < x < 4$$
$$= 0; x \text{ lainnya.}$$

a. Hitung $P(1 < X < 3)$.

b. Hitung $P(X > 2)$ berdasarkan fungsi disribusinya

Penyeselaian:

a. Berdasarkan sifat (iii) dari fungsi densitas, maka:

$$P = (1 < X < 3) = \int_{1}^{3} \frac{1}{4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(x \quad \Big]_{x=1}^{3} \right)$$

$$P = (1 < X < 3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b. Fungsi distribusi dari X adalah sebagai berikut:

Untuk $x < 0$

$$G(x) = 0$$

Untuk $0 \le x < 4$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} g(t) + \int_{0}^{x} g(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{4} dt$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\left(t \Big]_{0}^{x} \right)$$

$$G(x) = \frac{1}{4} x$$

Untuk $x \ge 4$

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} g(t)\, dt + \int_{0}^{4} g(t)\, dt + \int_{4}^{\infty} g(t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{4} \frac{1}{4}\, dt + \int_{4}^{\infty} 0\, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\left(t \Big|_{0}^{4}\right) + 0$$

$$G(x) = 1$$

Jadi: $G(x) = 0; x < 0$

$= \frac{1}{4}x; 0 \leq x < 4$

$= 1; x \geq 4$

Maka:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - G(2)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)(2)$$

$$P(X > 2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

7.2 Distribusi Gamma

Distribusi gamma ini mempunyai fungsi densitas berbentuk:

$f(x) = k\,.\,x^{\alpha-1}\,.\,e^{\frac{-x}{\beta}}; x > 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0$

$= 0; x$ lainnya.

Kita akan menentukan nilai konstanta k sedemikian hingga fungsi di atas memenuhi sebuah fungsi densitas.

- Sifat (i) dari fungsi densitas: $f(x) \geq 0$

  $k\,.\,x^{\alpha-1}\,.\,e^{\frac{-x}{\beta}} \geq 0$

  Karena $x > 0$, $\alpha > 0$, dan $\beta > 0$, maka k > 0
- Sifat (ii) dari fungsi densitas: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx = 1$$
$$\int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\infty} k\,.\,x^{\alpha-1}.\,e^{\frac{-x}{\beta}} dx = 1$$
$$0 + k\,.\int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1}.\,e^{\frac{-x}{\beta}} dx = 1$$

Integral di atas diselesaikan dengan menggunakan bantuan fungsi gamma yaitu:

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1}\,.\,e^{-y}\, dy, \text{untuk } \alpha > 0$$

Keterangan lebih lanjut dari fungsi gamma ini bisa dilihat dalam Lampiran 1.

Misalnya: $y = \frac{x}{\beta}$, maka $x = \beta y$

$$dx = \beta\, dy$$

Batas-batas:: Untuk $x = 0$, maka $y = 0$
Untuk $x = \infty$, maka $y = \infty$

$$k\,.\int_{0}^{\infty} (\beta y)^{\alpha-1}\,.\,e^{-y}\,.\,\beta\, dy = 1$$
$$k\,.\,\beta^{\alpha}\,.\int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1}\,.\,e^{-y}\,.\,\beta\, dy = 1$$
$$k\,.\,\beta^{\alpha}\,.\,\Gamma(\alpha) = 1$$
$$k = \frac{1}{\beta^{\alpha}\,.\,\Gamma(\alpha)}$$

Dari uraian di atas, kita peroleh definisi distribusi gamma, yaitu sebagai berikut.

Definisi 7.2: FUNGSI DENSITAS GAMMA

Peubah acak X dikatakan berdistribusi gamma, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\,.\,\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\,.\,e^{\frac{-x}{\beta}}\,; x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$
$$= 0; x\ lainnya.$$

Peubah acak X yang berdistribusi gamma disebut juga *peubah acak gamma*. Penulisan notasi dari peubah acak X yang berdistribusi gamma adalah $G(x;\ \alpha,\ \beta)$, artinya peubah acak X berdistribusi gamma dengan parameter α dan β.

Peubah acak X berdistribusi gamma dengan parameter α dan β bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim G(\alpha, \beta)$$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi gamma bisa dilihat dalam Dalil 7.2.

Dalil 7.2 PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi gamma dirumuskan sebagai berikut.

1. $\mu = \alpha\,\beta$
2. $\sigma^2 = \alpha\beta^2$
3. $M_X(t) = (1 - \beta\, t)^{-\alpha}\, ; t < \frac{1}{\beta}$

Pemahaman uraian tentang distribusi gamma di perjelas melalui contoh 7.4 dan 7.5 .

Contoh 7.4

Apakah artinya *X*~*G*(3,3)? Kemudian tuliskan bentuk fungsi destitasnya,

Penyelesaian

X~*G*(3,3) artinya peubah acak X berdistribusi gamma dengan patameter $\alpha = 3\ dan\ \beta = 3$.

Fungsi densitas dan X terbentuk :

g(x)= $(\frac{1}{54})x^2.e_3^{-x}$; x > 0

= 0; x lainnya

Contoh 7.5

Misalnya peubah acak Y berdistribusi gamma dengan parameter $\alpha = 2\ dan\ \beta = 3$.

Hitung peluang bahwa Y berharga lebih dari 4 .

Penyelesaian :

H(y) = $\left(\frac{y}{9}\right) e_3^{-y}$; y > 0

= 0:lainnya

Jadi P(y>4) = $\int_4^\infty \frac{1}{9} y.e^{\frac{-y}{3}} dy$

= $\frac{1}{9} \lim_{b\to\infty} y.e^{\frac{-y}{3}} dy$

Intergal di atas diselesaikan dengan menggunakan intergail parsial .

Misalnya : u = y , maka $du = dy$

Dv = e_3^{-y}dy, maka v = -3 . $e^{\frac{-y}{3}}$

P(Y>4) = $\frac{1}{9} \lim_{b\to\infty} \left(-3y.e^{\frac{-y}{3}} \Big]_{y=4}^{b} + 3 \int_4^b e^{\frac{-y}{3}}\right) dy$

$= \frac{1}{9} \lim_{b\to\infty} \left(-3y.e^{\frac{-y}{3}}\right]_{y=4}^{b} + 9\int_4^b e^{\frac{-y}{3}}\Big) e^{\overline{y=4}}]dy$

$= \frac{1}{9} \lim_{b\to\infty} \left(-3b.e^{\frac{-y}{3}} + 12.e^{\frac{-4}{3}} - 9.e^{\frac{-b}{3}}.9.e^{\frac{-4}{3}}\right)$

$= \frac{1}{9} \left[\lim_{b\to\infty} \left(-3b.e^{\frac{-b}{3}} + 12.e^{\frac{-4}{3}} - \lim_{b\to\infty}\left(9.e^{\frac{-b}{3}}\right)\right)\right]$

$=\left(\frac{1}{9}\right)(0 + 21.e^{\frac{-3}{4}} - 0)$

P(Y>4)=$\left(\frac{21}{9}\right).e^{\frac{-4}{3}} = 0.6151$

7.3 Distribusi Khi-Kuadrat

Distribusikhi-kuadrat diperoleh dari distribusi gamma dengan $\alpha = \frac{v}{2}$ dan $\beta = 2$. Sehingga kita peroleh distribusi khi-kuadrat sebagai berikut:

Definisi 7.3: FUNGSI DENSITAS KHI-KUADRAT

Peubah acak X dikatakan berdistribusi khi-kuadrat, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}.\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\frac{(v-2)}{2}}.e^{\frac{-x}{2}};\ \ x > 0$$

= 0 ; x lainnya

Dalil 7.3:

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi khi- kuadrat dirumuskan sebagai berikut.

1. $\mu = v$
2. $\sigma^2 = 2v$
3. $M_x(t) = (1-2t)^{\frac{-v}{2}}; t < \frac{1}{2}$

Contoh 7.6:

Misalnya perubah acak X berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan y= 10. Hitung P(X >4,865) dan P(3,247 ≥ X ≤ 20,48).

Penyelesaian:

a. $P(X > 4{,}865) = 1 - (X \leq 4{,}865)$

$= 1 - F(4{,}865)$

Berdasarkan Tabel Distribusi Khi-Kuadrat dengan derajat kebebasan v= 10, diperoleh $F(4{,}865)= 0{,}900$

Jadi, $P(X > 4{,}865) = 1 - 0{,}100$

$P(X > 4{,}865) = 1 - 0{,}900$

b. $P(3{,}247 < X < 20{,}48) = P(X \leq 20{,}.48) - P(X \leq 3{,}427)$

$= F(20{,}48) - F(3{,}247)$

Berdasarkan Tabel Distribusi Khi-Kuadrat dengan derajat kebebasan v= 10, diperoleh $F(20{,}48) = 0{,}975$ dan $F\ (3{,}247) = 0{,}025$.

Jadi, $\mathrm{P}(3{,}247 \leq X \ \leq 20{,}48) = 0{,}975 - 0{,}025$

$\mathrm{P}(3{,}247 \leq X \ \leq 20{,}48) = 0{,}950$

7.4 Distribusi Normal Umum

Distribusi normal umum ini merupakan distribusi dari peubah kontinu yang paling banyak sekali dipakai sebagai pendekatan yang baik dari distribusi lainnya dengan persyaratan tertentu. Sifat-sifat distribusi normal umum secara matematika dipelajari pertama kali oleh tiga orang ahli , yaitu:

1. **Abraham de Moivre** (1667-1745)
2. **Pierre Laplace** (1749-1827
3. **Karl Gauss** (1777-1855)

Abraham de Moivre, seorang matematikawan dari inggris yang menemukan distribusi normal pada tahun 1733 sebagai hasil dari pendekatan disteibusi binominal dan penggunaannya terhadap masalah dalam permainan yang bersifat untung-untungan. Kemudian **Laplace** pada tahun 1774 mengenakan distribusi normal sebagai hasil dari beberapa kekeliruan dalam Astronomi. Pada tahun 1809 menggunakan kurva normal untuk menggambarkan teori kekeliruan pengukuran meliputi penghitungan orbit bintang di langit. Sepanjang abad ke-18 dan ke-19, beberapa upaya membuat untuk menetapkan model normal sebagai dasar hukum untuk semua peubah acak kontinu.

Berikut ini merupakan definisi distribusi normal umum.

Definisi 7.4: FUNGSI DENSITAS NORMAL UMUM

Perubahan acak X *di katakana berdistribusi normal umum, jika dan hanya jika fingsi densitasnya bentuk*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ .\ \sigma^2}} exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty\ , \sigma^2\ > 0$$

Peubah acak X yang berdistribusi normal umum di sebut juga peubahacak normal umum. Penulisan notasi dari peubah ajak yang berdistribusi normal umum adalah $N(x; \mu,\ \sigma^2)$, artinya peubah acak X berdistribusi normal dengan rataan μ dan varians σ^2 bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim N(\mu\ , \sigma^2\ )$$

Beberapa sifat dari kurva fungi densitas disteribusi normal umum adalah sebagai berikut.

i. Kurvanya berbentuk lonceng dan simetrik di $x = \mu$.
ii. Rataan, median, dan modus dari distribusi berimpitan.
iii. Fungsi densitas mencapai nilai maksimum di $x = \mu$ sebesar $\frac{1}{\sqrt{2\sigma\ .\ \sigma^2}}$
iv. Kurvanya berasimtot sumbu datar x.
v. Kurvanya mempunyai titik infleksi $\big(x, f(x)\big)$, dengan:

$$x = \mu \pm\ \sigma$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ .\ \sigma^2}} e^{\frac{1}{2}}$$

vi. Luas daerah di bawah kurva sebagai berikut:
   - $P(|\ X - \mu\ | < \sigma) = 0{,}6826$
   - $P(|\ X - \pi\ | < 2\sigma) = 0{,}9544$
   - $P(|\ X - \pi\ | < 3\sigma) = 0{,}9973$

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi normal umum bias dilihat dalam Dalil 7.4.

Dalil 7.4: PARAMENTER DISTRIBUSI NORMAL UMUM

Rataan, varians, dan fungsi pembangkit momen dari distribusi normal umum dirumuskan sebagai berikut.

1. $E(X = \mu)$
2. $Var(X) = \sigma^2$
3. $M_x(t) = exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right);\ t\epsilon\Re$

Pemahaman uraian tentang distribusi normal umum bias dilihat dalam contoh 7.7 dan 7.8.

Contoh 7.7

Jika fungsi pembangkit momen dari *X* berbentuk $exp(5t + 18t^2)$,maka:

a. Tentukan distribusi dari *X*,

b. Tentukan bentuk fungsi densitas dari *X*.

Penyelesaian:

Fungsi pembangkit momen dari *X* bisa ditulis sebagai berikut.

a. ternyata *X* berdistribusi normal umum dengan rataan 5 dan varians 36
   atau ditulis: X~N(5;36)

b.fungsi densitas dari *X* berbentuk:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{72\pi}} exp\left[\frac{-1}{72}(x-5)^2\right]; -\infty < x < \infty$

Contoh 7.8:

Misalkan *X* adalah perubah acak berdistribusi normal dengan rataan 2 dan varians 4.

Jika $Y=2X^2 - 1$, maka hitung E(Y).

Penyelesaian:

Diketahui E(X) = 2 dan Var (X) = 4

Maka : $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$4 = E(X^2) - 4$

$E(X^2) = 8$

Sehingga: $E(Y) = E(2X^2 - 1) = E(2X^2) - 1$

$= 2 . E(X^2) - 1$

$= 2(8) - 1$

$E(Y) = 15$

7.5 Distribusi Normal Baku

Penghitungan luas daerah di bawah kurva distribusi normal umum agar lebih mudah, biasanya dilakukan dengan menggunakan bantuan Tabel Distribusi Normal Baku.

Berikut ini merupakan definisi distribusi normal baku.

Definisi 7.5: FUNGSI DENSITAS NORMAL BAKU

Distribusi normal umum dengan rataan μ = 0 dan varians σ^2=1

Dinamakan distribusi normal baku dan fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-1}{2} x^2\right);\ -\infty < x < \infty$$

Perubah acak *X* yang berdistribusi normal baku disebut juga *peubah acak normal baku*.

Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi normal baku adalah N(x;0,1), artinya peubah acak *X* berdistribusi normal umum dengan rataan 0 dan varians 1.

Peubah acak *X* yang berdistribusi normal umum dengan rataan 0 dan varians 1 atau peubah acak *X* yang berdistribusi normal baku bisa juga ditulis sebagai:

$X \sim N(0;1)$

Dalil 7.5:PENDEKATAN DISTRIBUSI NORMAL UMUM KE NORMAL BAKU

Jika X adalah peubah acak berdistribsi normal umum dengan rataan μ dan simpangan baku , maka :

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Mengikuti distribusi normal baku.

Bukti :

Dari Z = $\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$, ternyata hubungan antara *X* dan Z adalah linier.

Apabila peubah acak *X* mengambil nilai x_1 dan x_2, maka :

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x;\ \mu, \sigma^2)dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}} exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] dx$$

Misalkan; z = $\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$, maka $dx = \sigma\ dz$

Batas-batas: Untuk $x = x_1$, maka $z = \left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right) = z_1$

Untuk $x = x_2$, maka = $z = \left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) = z_2$

Jadi: $P(x_1 < X < x_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}} exp\left(\frac{-1}{2} z^2\right) .\sigma\, dz$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-1}{2} z^2\right) dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} N(z; 0,1) dz$$

$$P(x_1 < X < x_2) = P(z_1 < Z < z_2)$$

CARA LAIN

Kita akan membuktikannya dengan menggunakan perumusan fungsi distribusi. Fungsi distribusi dari Z adalah:

$$F(z) = P(Z \le z)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right)$$

$$= P(X \le \mu + \sigma z$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma z} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma z} \frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}} exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu+\sigma z} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

Misalnya $y = \left[\frac{x-\mu}{o^2}\right]$, maka dx = σ dy

Batas-batas: Untuk x = -∞, maka y = -∞

Untuk x = μ + σ z, maka y= z

Jadi: F(z) = $\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2} y^2\right) dy$

Bentuk diatas merupakan fungsi distribusi dari peubah acak Z yang berdistribusi normal baku dengan fungsi densitasnya berbentuk:

f(z) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(\frac{-1}{2} z^2\right)$; -∞ < z < ∞

Perhitungan peluang dari peubah acak X yang berdistribusi normal umum bisa dilakukan sebagai berikut.

a. Nilai peubah acak X diubah ke dalam angka baku $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ dan hasilnya dicatat hingga dua angka desimal.
b. Gambarkan kurva distribusi normal baku.
c. Nilai Z yang dicari diletakkan pada kurva, bisa disebelah kiri atau kanan Z=0
d. Daerah yang dicari ditandai pada kurvanya sesuai dengan nilai Z-nya.
e. Hitung peluang yang dicari dengan cara menghitung luas daerah yang ditandai berdasarkan Tabel Distribusi Normal Baku.

KERANGKA MODUL PEMBELAJARAN
MATA KULIAH: STATISTIKA MATEMATIKA

Nama : **Dr. Nelson Nainggolan,M.Si.**
Drs. Jantje Denny Prang, M.Si
Institusi : **Universitas Sam Ratulangi Manado**
Fakultas : **MIPA**
Program Studi : **Matematika**

RANCANGAN PEMBELAJARAN

Mata Kuliah : **Statistika Matematika** **Semester : 5 (Lima);** **Kode: MAT 331-;** **sks: 3 (3-0)**
Program Studi : **Matematika**

CAPAIAN PEMBELAJARAN:

a. Menguasai konsep teoretis matematika meliputi logika matematika, kalkulus, matematika diskret, aljabar, analisis dan geometri, serta teori peluang dan statistika;
   Sub Cp: menguasai konsep, teoritis matematika meliputi logika matematika, kalkulus, aljabar, teori peluang dan statistika pada bidang statistika teori;
b. Mampu melakukan analisis terhadap berbagai alternatif model matematis yang telah tersedia dan menyajikan simpulan analisis secara mandiri atau kelompok, untuk pengambilan keputusan yang tepat
c. Merekonstruksi, memodifikasi, menganalisis model matematis dari suatu sistem/masalah, mengkaji keakuratan model dan kemanfaatan model dan menarik kesimpulan yang kontekstual;
   Sub Cp: merekonstruksi, menganalisi, model matematis dari suatu sistem/masalah, dan menarik kesimpulan yang kontekstual
d. Mampu melakukan eksplorasi, penalaran logis, generalisasi, abstraksi, dan pembuktian formal dalam merumuskan dan memodelkan masalah dengan variabel dan asumsi yang spesifik melalui pendekatan matematis dengan atau tanpa bantuan piranti lunak matematis;
   Sub Cp: mampu melakukan eksplorasi, penalaran logis, generalisasi abstraksi, dalam merumuskan dan memodelkan masalah dengan variable dan asumsi yang spesifik melalui pendekatan matematis

Matriks Pembelajaran :

Ming	Kemampuan akhir yang diharapkan	Bahan Kajian/Materi Pembelajaran	Bentuk Pembelajaran	Waktu Belajar (Menit)	Deskripsi Tugas	Luaran	Kriteria Penilaian (Indikator)	Bobot Nilai (%)	Referensi
1	**2**	**3**	**4**	**5**		**6**	**7**	**8**	
1		Penjelasan Umum Pelaksanaan Perkuliahan	Diskusi	150	Mahasiswa mendengarkan penjelasan dosen tentang kontrak perkuliahaan	Kesepakatan Dosen dengan Mahasiswa			

2	Mampu menjelaskan konsep dasar peluang, kejadian, kaidah peluang, aturan peluang, peluang bersyarat dan kaidah bayes	Konsep Dasar Peluang	Diskusi Kelompok	150	- Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil - Diskusi kelas	Hasil ringkasan diskusi (perorangan)	- Keaktifan dalam diskusi kelompok - Kualitas ringkasan hasil kajian perorangan	5	1, 2
3	Mampu menjelaskan pengertian peubah acak diskrit/kontinu, pa tunggal diskrit/kontinu, sebaran peluang pa diskrit/kontinu.	Peubah Acak dan Sebaran Peluang Tunggal	Diskusi Kelompok	150	- Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil - Diskusi kelas	Hasil ringkasan diskusi (perorangan)	- Keaktifan dalam diskusi kelompok - Kualitas ringkasan hasil kajian perorangan	10	1, 2, 3
4-5	Mampu menjelaskan sebaran peluang gabungan 2 pa diskrit/kontinu, peluang marginal, bersyarat 2 pa, dan bebas stokastik	Peubah Acak dan Sebaran Peubah Acak Gabungan	Diskusi Kelompok	300	- Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil - Diskusi kelas - Mahasiswa mengikuti tes formatif	Hasil tes formatif (perorangan)	- Keaktifan dalam diskusi kelompok - Hasil tes formatif perorangan	15	1, 2, 3, 4
6	Mampu menjelaskan dan menyelesaikan nilai harapan pa tunggal diskrit dan kontinu	Harapan Matematis bagi Peubah Acak Tunggal	Diskusi Kelompok	150	- Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil - Diskusi kelas	Hasil ringkasan diskusi (perorangan)	- Keaktifan dalam diskusi kelompok - Kualitas ringkasan perorangan	10	1, 2, 3, 4
7-8	Mampu menjelaskan dan menyelesaikan nilai harapan pa gabungan diskrit/kontinu	Harapan Matematis bagi Peubah Acak Gabungan.	Diskusi Kelompok	300	- Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil - Diskusi kelas	Hasil tes formatif (perorangan)	- Keaktifan dalam diskusi kelompok - Hasil tes formatif perorangan	15	1, 2, 3, 4

					- Mahasiswa mengikuti tes formatif (perorangan)				
9	Mampu menjelaskan dan menyelesaikan fungsi pembangkit momen bagi pa tunggal	Fungsi Pembangkit Moment bagi Peubah Acak Tunggal	Diskusi Kelompok	150	- Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil - Diskusi kelas	Hasil ringkasan diskusi (perorangan)	- Keaktifan dalam diskusi kelompok - Kualitas ringkasan perorangani	10	1, 2, 3, 4
10-11	Mampu menjelaskan, menyelesaikan FPM gabungan, pa diskrit/kontinu, dan koef. korelasi	Fungsi Pembangkit Moment bagi Peubah Acak Gabungan; diskrit dan kontinu	Diskusi Kelompok	300	- Mahasiswa mendiskusikan permasalahan berupa tugas yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil - Diskusi kelas	Hasil tes formatif (perorangan)	- Keaktifan dalam diskusi kelompok - Hasil tes formatif perorangan	15	1, 4
12-13	Mampu menjelaskan beberapa sebaran teoritis khusus bagi pa diskrit	Sebaran-Sebaran Teoritis Diskrit	*Cooperative Learning*	300	- Mahasiswa membahas permasalahan dalam tugas terstruktur yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil - Diskusi kelas	Hasil pembahasan soal-soal dalam tugas terstruktur	- Keaktifan dalam diskusi kelompok - Hasil pembahasan soal-soal perorangan	10	1, 3, 4
14-16	Mampu menjelaskan beberapa sebaran teoritis khusus bagi pa kontinu	Sebaran-Sebaran Teoritis Kontinu	*Cooperative Learning*	300	- Mahasiswa membahas permasalahan dalam tugas terstruktur yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil - Diskusi kelas	Hasil pembahasan soal-soal dalam tugas terstruktur	- Keaktifan dalam diskusi kelompok - Hasil pembahasan soal-soal perorangan	10	1, 2, 4

Daftar Referensi:

1. Yrama Widya – Pengantar Statistika Matematika, (2009) Herryanto N., dan Gantini T.
2. Wiley – Introduktion Statistics Mathematics, 9ed (2012) Hogg and Craig
3. ITB Press – Pengantar Peluang
4. Wadsworth Pasifik Grove, CA *Statisticcal Inference,* 10ed (2012) Casella, G & R.L. Berger.

FORMAT RANCANGAN TUGAS

Nama Mata Kuliah	**:**	**Statistika Matematika**	**Sks**	**:**	**3 (3-0)**
Program Studi	**:**	**Matematika**	**Pertemuan ke**	**:**	**2**
Fakultas	**:**	**MIPA**			

A. TUJUAN TUGAS:

Menjelaskan konsep dasar peluang

B. URAIAN TUGAS:

1. Obyek Garapan: Konsep Dasar Peluang
2. Batasan yang harus dikerjakan:
   a. Pengertian peluang, kejadian,
   b. Kaidah-kaidah Peluang
   c. Aturan Peluang
   d. Peluang Bersyarat
   e. Kaidah Bayes
3. Metode/Cara Pengerjaan (acuan cara pengerjaan):
   - Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil
   - Permasalahan yang didiskusikan:
     1) Jelaskan pengertian peluang!
     2) Sebutkan dan Jelaskan kaidah-kaidah peluang!
     3) Jelaskan prinsip dasar peluang bersyarat, dan berikan teladan!
     4) Jelaskan sifat-sifat bayesian!
     5) Teladan peluang bayes!
   - Hasil diskusi kelompok didiskusikan di kelas
   - Mahasiswa meringkas hasil diskusi
4. Deskripsi Luaran tugas yang dihasilkan:
   Hasil ringkasan diskusi(perorangan), setiap mahasiswa diberikan waktu selama 20 menit terakhir untuk menyusun ringkasan.

C. KRITERIA PENILAIAN (5%):

- Keaktifan dalam diskusi kelompok
- Hasil ringkasan diskusi

RUBRIK PENILAIAN

KRITERIA 1:Keaktifan dalam diskusi (20%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan (≥80)**	**Memuaskan (65-79)**	**Batas (55-64)**	**Kurang Memuaskan (40-54)**	**Di bawah standard (<40)**	**SKOR**
Keaktifan mencari literatur	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
Keaktifan berdiskusi	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
TOTAL						

KRITERIA 2: Hasil ringkasan diskusi (80%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan (≥80)**	**Memuaskan (65-79)**	**Batas (55-64)**	**Kurang Memuaskan (40-54)**	**Di bawah standard (<40)**	**SKOR**
Skor						

FORMAT RANCANGAN TUGAS

Nama Mata Kuliah	**:**	**Statistika Matematika**	**Sks**	**:**	**3 (3-0)**
Program Studi	**:**	**Matematika**	**Pertemuan ke**	**:**	**3**
Fakultas	**:**	**MIPA**			

A. TUJUAN TUGAS:

Mampu menjelaskan pengertian peubah acak diskrit/kontinu, pa tunggal diskrit/kontinu, sebaran peluang pa diskrit/kontinu

B. URAIAN TUGAS:

1. Obyek Garapan: Peubah Acak dan Sebaran Peluang Tunggal
2. Batasan yang harus dikerjakan:
   a. Pengertian Peubah Acak (Variable Random)
   b. Ruang Contoh : PA Diskrit dan PA Kontinu
   c. Distribusi Satu Peubah Acak Diskrit dan Kontinu
   d. Distribusi Peluang dan Distribusi Kumulatif Peubah Acak Diskrit
   e. Grafik Fungsi Peluang, Histogram dan Grafik Fungsi Kumulatif
   f. Distribusi Peluang dan Distribusi Kumulatif Peubah Acak Kontinu
   g. Grafik Fungsi Peluang dan Grafik Fungsi Kumulatif

3. Metode/Cara Pengerjaan (acuan cara pengerjaan):

- Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil.
- Permasalahan yang dibahas meliputi:
  1. Jelaskan pengertian peubah acak!
  2. Tunjukkan rumus peluang bagi pa diskrit, dan pa kontinu!
  3. Tunjukkan bahwa f(x) adalah sebaran peluang diskrit!
  4. Carilah sebaran kumulatif dari pa diskrit!
  5. Gambarkan f(x), F(x), dan histogram dari pa diskrit, berikan teladan!
  6. Tunjukkan bahwa f(x) adalah sebaran peluang kontinu!
  7. Carilah F(x) dari pa kontinu!
  8. Gambarkan f(x), F(x), dan histogram dari pa kontinu, berikan Teladan!
- Hasil diskusi kelompok didiskusikan di kelas
- Mahasiswa meringkas hasil diskusi

4. Deskripsi Luaran tugas yang dihasilkan:
Hasil ringkasan diskusi(perorangan), setiap mahasiswa diberikan waktu selama 20 menit terakhir untuk menyusun ringkasan

C. KRITERIA PENILAIAN (10%):

- Keaktifan dalam diskusi kelompok
- Kualitas ringkasan hasil kajian perorangan

RUBRIK PENILAIAN

KRITERIA 1:Keaktifan dalam diskusi (20%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan (≥80)**	**Memuaskan (65-79)**	**Batas (55-64)**	**Kurang Memuaskan (40-54)**	**Di bawah standard (<40)**	**SKOR**
Keaktifan mencari literatur	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
Keaktifan berdiskusi	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
TOTAL						

KRITERIA 2: Kualitas ringkasan hasil kajian perorangan (80%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan (≥80)**	**Memuaskan (65-79)**	**Batas (55-64)**	**Kurang Memuaskan (40-54)**	**Di bawah standard (<40)**	**SKOR**
Kelengkapan konsep	Sangat lengkap (mampu mengembangkan konsep secara optimal)	Lengkap (melebihi konsep minimal pada modul)	Cukup lengkap (sesuai konsep minimal pada modul)	Kurang lengkap (dibawah konsep minimal pada modul)	Tidak lengkap (konsep tidak sesuai)	
Ketepatan konsep	Sangat tepat (sesuai dengan logika ilmiah)	Tepat	Cukup tepat	Kurang tepat	Tidak tepat	

Ide baru dan kreativitas	Sangat baik (memunculkan beberapa ide baru)	Baik (memunculkan ide baru)	Cukup baik (ide seperti pada modul)	Kurang baik (ide di bawah tuntutan modul)	Tidak baik (miskin ide)	
Total						

FORMAT RANCANGAN TUGAS

Nama Mata Kuliah	**:**	**Statistika Matematika**	**Sks**	**:**	**3 (3-0)**
Program Studi	**:**	**Matematika**	**Pertemuan ke**	**:**	**4-5**
Fakultas	**:**	**MIPA**			

A. TUJUAN TUGAS:

Mampu menjelaskan sebaran dua peubah acak diskrit/kontinu, peluang marginal, peluang bersyarat dan bebas stokastik

B. URAIAN TUGAS:

1. Obyek Garapan: Sebaran dua peubah acak diskrit / kontinu
2. Batasan yang harus dikerjakan:
   a. Sebaran peluang gabungan peubah acak diskrit dan kontinu
   b. Sebaran marginal peubah acak diskrit!
   c. Sebaran marginal pa kontinu!
   d. Sebaran bersyarat peubah acak diskrit dan kontinu
   e. Kebebasan stokastik peubah acak diskrit dan kontinu
3. Metode/Cara Pengerjaan (acuan cara pengerjaan):
   - Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil.
   - Permasalahan pada tahap ini ialah:
     1) Jelaskan dan tunjukkan rumus peluang gabungan bagi pa diskrit!
     2) Teladan peluang gabungan pa diskrit!
     3) Jelaskan dan tunjukkan rumus peluang bagi pa kontinu
     4) Teladan peluang gabungan pa kontinu!
     5) Jelaskan dan tunjukkan sebaran bersyarat bagi pa diskrit dan kontinu!
     6) Jelaskan pronsip dasar kebebasan stokastik!
   - Hasil diskusi kelompok didiskusikan di kelas
   - Mahasiswa mengikuti tes formatif
4. Deskripsi Luaran tugas yang dihasilkan:
   Hasil tes formatif (perorangan) yang dilaksanakan selama 50 menit terakhir pada tahap ini.

C. KRITERIA PENILAIAN (15%):

- Keaktifan dalam diskusi kelompok

- Hasil tes formatif

RUBRIK PENILAIAN

KRITERIA 1:Keaktifan dalam diskusi (50%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan (≥80)**	**Memuaskan (65-79)**	**Batas (55-64)**	**Kurang Memuaskan (40-54)**	**Di bawah standard (<40)**	**SKOR**
Keaktifan mencari literatur	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
Keaktifan berdiskusi	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
TOTAL						

KRITERIA 2: Hasil test formatif (30%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan (≥80)**	**Memuaskan (65-79)**	**Batas (55-64)**	**Kurang Memuaskan (40-54)**	**Di bawah standard (<40)**	**SKOR**
Skor						

FORMAT RANCANGAN TUGAS

Nama Mata Kuliah	**:**	**Statistika Matematika**	**Sks**	**:**	**3 (3-0)**
Program Studi	**:**	**Matematika**	**Pertemuan ke**	**:**	**6**
Fakultas	**:**	**MIPA**			

A. TUJUAN TUGAS:

Mampu menjelaskan dan menyelesaikan nilai harapan tunggal pa diskrit dan kontinu

B. URAIAN TUGAS:

1. Obyek Garapan: Harapan Matematis bagi Peubah Acak Tunggal
2. Batasan yang harus dikerjakan:
   a. Mean (rataan) peubah acak diskrit dan kontinu
   b. Ragam (Varians) peubah acak diskrit dan kontinu sifat-sifat Ekspetasi
   c. Sifat-sifat ekspektasi
   d. Ekspetasi khusus : mean dan ragam
   e. Sifat-sifat ragam
3. Metode/Cara Pengerjaan (acuan cara pengerjaan):
   - Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil.
   - Permasalahan pada tahap ini ialah:
     1) Jelaskan dan tunjukkan mean pa diskrit dan kontinu!
     2) Jelaskan dan tunjukkan ragam pa diskrit dan kontinu!
     3) Tunjukkan sifat-sifat ekspektasi!
     4) Jelaskan bagaimana ekspektasi khusus bagi mean dan ragam!
     5) Jelaskan dan tunjukkan sifat-sifat bagi ragam
   - Hasil diskusi kelompok didiskusikan di kelas
   - Mahasiswa meringkas hasil diskusi
4. Deskripsi Luaran tugas yang dihasilkan:
   Hasil ringkasan diskusi(perorangan), setiap mahasiswa diberikan waktu selama 20 menit terakhir untuk menyusun ringkasan

C. KRITERIA PENILAIAN (10%):

- Keaktifan dalam diskusi
- Ringkasan hasil diskusi

RUBRIK PENILAIAN

KRITERIA 1:Keaktifan dalam diskusi (20%)

DIMENSI	Sangat Memuaskan (≥80)	Memuaskan (65-79)	Batas (55-64)	Kurang Memuaskan (40-54)	Di bawah standard (<40)	SKOR
Keaktifan mencari literatur	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
Keaktifan berdiskusi	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
TOTAL						

KRITERIA 2: Kualitas ringkasan diskusi secara perorangan (80%)

DIMENSI	Sangat Memuaskan (≥80)	Memuaskan (65-79)	Batas (55-64)	Kurang Memuaskan (40-54)	Di bawah standard (<40)	SKOR
Kelengkapan konsep	Sangat lengkap (mampu mengembangkan konsep secara optimal)	Lengkap (melebihi konsep minimal pada modul)	Cukup lengkap (sesuai konsep minimal pada modul)	Kurang lengkap (dibawah konsep minimal pada modul)	Tidak lengkap (konsep tidak sesuai)	
Ketepatan konsep	Sangat tepat (sesuai dengan logika ilmiah)	Tepat	Cukup tepat	Kurang tepat	Tidak tepat	
Ide baru dan kreativitas	Sangat baik (memunculkan beberapa ide baru)	Baik (memunculkan ide baru)	Cukup baik (ide seperti pada modul)	Kurang baik (ide di bawah tuntutan modul)	Tidak baik (miskin ide)	
Total						

FORMAT RANCANGAN TUGAS

Nama Mata Kuliah	**:**	**Statistika Matematika**	**Sks**	**:**	**3 (3-0)**
Program Studi	**:**	**Matematika**	**Pertemuan ke**	**:**	**7 - 8**
Fakultas	**:**	**MIPA**			

A. TUJUAN TUGAS:

Mampu menjelaskan dan menyelesaikan nilai harapan bagi pa gabungan diskrit/kontinu

B. URAIAN TUGAS:

1. Obyek Garapan: Harapan Matematis bagi Peubah Acak Gabungan Diskrit/Kontinu
2. Batasan yang harus dikerjakan:
   a. Ekspetasi gabungan peubah acak sebaran diskrit dan kontinu
   b. Ekspetasi bersyarat peubah acak diskrit dan kontinu
   c. Mean (rataan) peubah acak sebaran diskrit dan kontinu
   d. Kovarians peubah acak sebaran diskrit dan kontinu
   e. Ragam (varians) bersyarat peubah acak diskrit dan kontinu
   f. Koefisien korelasi peubah acak sebaran diskrit dan kontinu
   g. Akibat kebebasan stokastik
3. Metode/Cara Pengerjaan (acuan cara pengerjaan):
   - Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil.
   - Permasalahan yang didiskusikan sebagai berikut:
     1) Jelaskan dan tunjukkan ekspetasi gabungan pa diskrit/kontinu!
     2) Jelaskan dan tunjukkan ekspetasi bersyarat pa diskrit dan kontinu!
     3) Tunjukkan mean pa sebaran diskrit dan kontinu dan berikan teladan!
     4) Tunjukkan kovarians peubah acak sebaran diskrit dan kontinu dan berikan teladan!
     5) Tunjukkan ragam bersyarat pa diskrit dan kontinu dan berikan teladan!
     6) Bagaimana mendapatkan koefisien korelasi pa sebaran diskrit dan kontinu!
     7) Tunjukkan kebebasan stokastik!
   - Hasil diskusi kelompok didiskusikan di kelas
   - Mahasiswa mengikuti tes formatif
4. Deskripsi Luaran tugas yang dihasilkan:

Hasil tes formatif (perorangan) selama 50 menit terakhir pada tahap ini.

C. KRITERIA PENILAIAN (15%):

- Keaktifan dalam diskusi kelompok
- Hasil tes formatif

RUBRIK PENILAIAN

KRITERIA 1:Keaktifan dalam diskusi dalam kelompok (50%)

DIMENSI	Sangat Memuaskan (≥80)	Memuaskan (65-79)	Batas (55-64)	Kurang Memuaskan (40-54)	Di bawah standard (<40)	SKOR
Keaktifan mencari literatur	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
Keaktifan berdiskusi	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
TOTAL						

KRITERIA 2: Hasil Tes Formatif (50%)

DIMENSI	Sangat Memuaskan (≥80)	Memuaskan (65-79)	Batas (55-64)	Kurang Memuaskan (40-54)	Di bawah standard (<40)	SKOR
Skor						

FORMAT RANCANGAN TUGAS

Nama Mata Kuliah	**:**	**Statistika Matematia**	**Sks**	**:**	**3 (3-0)**
Program Studi	**:**	**Matematika**	**Pertemuan ke**	**:**	**9**
Fakultas	**:**	**MIPA**			

A. TUJUAN TUGAS:

Mampu menjelaskan dan menyelesaikan fungsi pembangkit moment bagi pa tunggal

B. URAIAN TUGAS:

1. Obyek Garapan: Fungsi Pembangkit Momen bagi peubah Acak Tunggal, Diskrit dan Kontinu
2. Batasan yang harus dikerjakan:
   a. Pengertian dan konsep moment
   b. Fungsi pembangkit momen pa diskrit
   c. Fungsi pembangkit moment pa kontinu
   d. Pertidaksamaan Chebyshev
3. Metode/Cara Pengerjaan (acuan cara pengerjaan):
   Diskusi kelompok
   - Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil.
   - Permasalahan yang didiskusikan:
     Jelaskan konsep dasar moment!
     1) Jelaskan dan tunjukkan fpm ke-1 sd ke-n bagi pa diskrit!
     2) Jelaskan dan tunjukkan fpm ke-1 sd ke-n bagi pa kontinu!
     3) Jelaskan dan unjukkan pertidaksamaan Chehshev!
   - Hasil diskusi kelompok didiskusikan dalam diskusi kelas
   - Mahasiswa meringkas hasil diskusi
4. Deskripsi Luaran tugas yang dihasilkan:
   Hasil ringkasan diskusi (perorangan), setiap mahasiswa diberikan waktu selama 20 menit terakhir untuk menyusun ringkasan.

C. KRITERIA PENILAIAN (10%):

- Keaktifan dalam diskusi kelompok
- Kualitas laporan perorangan

RUBRIK PENILAIAN

KRITERIA 1:Keaktifan dalam diskusi dalam kelompok (30%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan** (≥80)	**Memuaskan** (65-79)	**Batas** (55-64)	**Kurang Memuaskan** (40-54)	**Di bawah standard** (<40)	**SKOR**
Keaktifan mencari literatur	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
Keaktifan berdiskusi	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
TOTAL						

- **KRITERIA 2: Kualitas laporan hasil diskusi kelompok secara perorangan perorangan (70%)**

DIMENSI	**Sangat Memuaskan** (≥80)	**Memuaskan** (65-79)	**Batas** (55-64)	**Kurang Memuaskan** (40-54)	**Di bawah standard** (<40)	**SKOR**
Kelengkapan konsep	Sangat lengkap (mampu mengembangkan konsep secara optimal)	Lengkap (melebihi konsep minimal pada modul)	Cukup lengkap (sesuai konsep minimal pada modul)	Kurang lengkap (dibawah konsep minimal pada modul)	Tidak lengkap (konsep tidak sesuai)	
Ketepatan konsep	Sangat tepat (sesuai dengan logika ilmiah)	Tepat	Cukup tepat	Kurang tepat	Tidak tepat	
Ide baru dan kreativitas	Sangat baik (memunculkan beberapa ide baru)	Baik (memunculkan ide baru)	Cukup baik (ide seperti pada modul)	Kurang baik (ide di bawah tuntutan modul)	Tidak baik (miskin ide)	
Total						

FORMAT RANCANGAN TUGAS

Nama Mata Kuliah	**:**	**Statistika Matematika**	**Sks**	**:**	**3 (3-0)**
Program Studi	**:**	**Matematika**	**Pertemuan ke**	**:**	**10 - 11**
Fakultas	**:**	**MIPA**			

A. TUJUAN TUGAS:

Mampu menjelaskan dan menyelesaikan fungsi pembangkit moment gabungan bagi pa diskrit dan kontinu

B. URAIAN TUGAS:

1. Obyek Garapan: Fungsi Pembangkit Moment bagi Peubah Acak Gabungan Diskrit dan Kontinu
2. Batasan yang harus dikerjakan:
   a. Fungsi pembangkit moment, moment ke-1 sd ke-n peubah acak diskrit
   b. Fungsi pembangkit momen, moment ke-1 sd moment ke-n peubah acak kontinu
   c. Koefisien korelasi peubah acak diskrit dan kontinu
3. Metode/Cara Pengerjaan (acuan cara pengerjaan):
   - Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil.
   - Permasalahan yang didiskusikan sebagai berikut:
     1) Jelaskan dan tunjukkan fpm bagi pa diskrit!
     2) Jelaskan dan tunjukkan fpm bagi pa kontinu!
     3) Tunjukkan koefisien korelasi pa diskrit dan kontinu dan berikan teladan!
   - Hasil diskusi kelompok didiskusikan di kelas
   - Mahasiswa mengikuti tes formatif
4. Deskripsi Luaran tugas yang dihasilkan:
   Hasil tes formatif (perorangan) selama 50 menit terakhir pada tahap ini.

C. KRITERIA PENILAIAN (15%):

- Keaktifan dalam diskusi kelompok
- Hasil tes formatif

RUBRIK PENILAIAN

KRITERIA 1:Keaktifan dalam diskusi dalam kelompok (50%)

DIMENSI	Sangat Memuaskan (≥80)	Memuaskan (65-79)	Batas (55-64)	Kurang Memuaskan (40-54)	Di bawah standard (<40)	SKOR
Keaktifan mencari literatur	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
Keaktifan berdiskusi	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
TOTAL						

KRITERIA 2: Hasil Tes Formatif (50%)

DIMENSI	Sangat Memuaskan (≥80)	Memuaskan (65-79)	Batas (55-64)	Kurang Memuaskan (40-54)	Di bawah standard (<40)	SKOR
Skor						

FORMAT RANCANGAN TUGAS

Nama Mata Kuliah	**:**	**Statistika Matematika**	**Sks**	**:**	**3 (3-0)**
Program Studi	**:**	**Matematika**	**Pertemuan ke**	**:**	**12 - 13**
Fakultas	**:**	**MIPA**			

A. TUJUAN TUGAS:

Mampu menjelaskan dan menunjukkan beberapa sebaran teoritik khusus diskrit

B. URAIAN TUGAS:

1. Obyek Garapan: Beberapa Sebaran Khusus Diskrit
2. Batasan yang harus dikerjakan:
   a. Konsep dasar percobaan Bernoulli dan sebaran Bernoulli
   b. Konsep dasar sebaran Binomial, mean dan ragam
   c. Konsep dasar sebaran Trinomial, mean dan ragam
   d. Konsep dasar sebaran Poisson, mean dan ragam
   e. Konsep dasar sebaran Geometrik, mean dan ragam
   f. Konsep dasar sebaran Hipergeometrik, mean dan ragam
3. Metode/Cara Pengerjaan (acuan cara pengerjaan):
   - Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil.
   - Permasalahan yang didiskusikan sebagai berikut:
     1) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar percobaan Bernoulli dan sebaran Bernoulli!
     2) Tunjukkan dan buktikan mean dan ragam sebaran bernoulli!
     3) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran binomial!
     4) Tunjukkan dan buktikan mean dan ragam sebaran binomial!
     5) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran trinomial!
     6) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran poisson dan sifat-sifatnya!
     7) Tunjukkan dan buktikan mean dan ragam sebaran poisson!
     8) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran geometrik!
     9) Berikan teladan dan selesaikan kasus sebaran geometrik
     10) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran hypergeometrik!
     11) Selesaikan beberapa teladan sebaran diskrit!

- Hasil diskusi kelompok didiskusikan di kelas
- Mahasiswa membahas permasalahan dalam tugas terstruktur yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil

4. Deskripsi Luaran tugas yang dihasilkan:
Hasil penyelesaian tugas terstruktur (perorangan) selama 50 menit terakhir pada tahap ini.

C. KRITERIA PENILAIAN (10%):

- Keaktifan dalam diskusi kelompok
- Hasil pembahasan tugas terstruktur

RUBRIK PENILAIAN

KRITERIA 1:Keaktifan dalam diskusi dalam kelompok (50%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan (≥80)**	**Memuaskan (65-79)**	**Batas (55-64)**	**Kurang Memuaskan (40-54)**	**Di bawah standard (<40)**	**SKOR**
Keaktifan mencari literatur	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
Keaktifan berdiskusi	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
TOTAL						

KRITERIA 2: Hasil Pembahasan Tugas Terstruktur (50%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan (≥80)**	**Memuaskan (65-79)**	**Batas (55-64)**	**Kurang Memuaskan (40-54)**	**Di bawah standard (<40)**	**SKOR**
Skor						

FORMAT RANCANGAN TUGAS

Nama Mata Kuliah	**:**	**Statistika Matematika**	**Sks**	**:**	**3 (3-0)**
Program Studi	**:**	**Matematika**	**Pertemuan ke**	**:**	**14 - 16**
Fakultas	**:**	**MIPA**			

A. TUJUAN TUGAS:

Mampu menjelaskan dan menunjukkan beberapa sebaran teoritik khusus kontinu

B. URAIAN TUGAS:

1. Obyek Garapan: Beberapa Sebaran Khusus Kontinu
2. Batasan yang harus dikerjakan:
   a. Konsep dasar sebaran Seragam
   b. Konsep dasar sebaran Seragam, mean dan ragam
   c. Konsep dasar sebaran gamma, mean dan ragam
   d. Konsep dasar sebaran eksponensial, mean dan ragam
   e. Konsep dasar sebaran khi-kuadrat, mean dan ragam
   f. Konsep dasar sebaran normal, mean dan ragam
   g. Konsep dasar sebaran normal baku
   h. Konsep dasar sebaran normal dua peubah acak
   i. Konsep dasar sebaran t dan F
3. **3.** Metode/Cara Pengerjaan (acuan cara pengerjaan):
   - Mahasiswa mendiskusikan permasalahan yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil.
   - Permasalahan yang didiskusikan sebagai berikut:
     1) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran seragam!
     2) Tunjukkan dan buktikan mean dan ragam sebaran seragam, berikan teladan!
     3) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran gamma!
     4) Tunjukkan dan buktikan mean dan ragam sebaran gamma, berikan teladan!
     5) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran eksponensial!
     6) Tunjukkan mean dan ragam sebaran eksponensial, berikan teladan!
     7) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran chi-square dan sifat-sifatnya!
     8) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran beta dan sifat-sifatnya!

9) Jelaskan dan tunjukkan prinsip dasar sebaran normal dan sifat-sifatnya!
10) Tunjukkan mean dan ragam sebaran normal!
11) Jelaskan dan tunjukkan sebaran normal baku!
12) Berikan teladan dan selesaikan kasus penggunaan sebaran normal baku!
13) Jelaskan dan tunjukkan sebaran normal dua peubah acak
14) Jelaskan dan berikan teladan sebaran t!
15) Jelaskan dan berikan teladan sebaran F!

- Hasil diskusi kelompok didiskusikan di kelas
- Mahasiswa membahas permasalahan dalam tugas terstruktur yang sudah disusun dosen dalam kelompok kecil

4. Deskripsi Luaran tugas yang dihasilkan:
Hasil penyelesaian tugas terstruktur (perorangan) selama 50 menit terakhir pada tahap ini.

C. KRITERIA PENILAIAN (10%):

- Keaktifan dalam diskusi kelompok
- Hasil pembahasan tugas terstruktur

RUBRIK PENILAIAN

KRITERIA 1:Keaktifan dalam diskusi dalam kelompok (50%)

DIMENSI	**Sangat Memuaskan** (≥80)	**Memuaskan** (65-79)	**Batas** (55-64)	**Kurang Memuaskan** (40-54)	**Di bawah standard** (<40)	**SKOR**
Keaktifan mencari literatur	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
Keaktifan berdiskusi	Sangat aktif	Aktif	Cukup aktif	Kurang aktif	Tidak aktif	
TOTAL						

KRITERIA 2: Hasil Pembahasan Tugas Terstruktur (50%)

DIMENSI	Sangat Memuaskan (≥80)	Memuaskan (65-79)	Batas (55-64)	Kurang Memuaskan (40-54)	Di bawah standard (<40)	SKOR
Skor						

GARIS BESAR MATERI PEMBELAJARAN

No.	Pertemuan	Materi Pembelajaran	Garis Besar Materi Pembelajaran
1.	1	Penjelasan Umum Pelaksanaan Perkuliahan	Pertemuan membahas capaian pembelajaran, metode dan strategi dalam pembelajaran, evaluasi, serta tugas-tugas yang akan dicapai selama pembelajaran
2.	2	Konsep Dasar Peluang	- Pengertian peluang dan kejadian - Kaidah-kaidah peluang - Aturan peluang - Peluang bersyarat - Kaidah bayes
3.	3	Peubah Acak dan Sebaran Peluang Tunggal	- Pengertian Peubah Acak (Variable Random) - Ruang Contoh atau Ruang Sampel : Peubah acak Diskrit dan Kontinu - Sebaran Satu Peubah Acak Diskrit dan Kontinu - Sebaran Peluang dan Sebaran Kumulatif Peubah Acak Diskrit - Grafik Fungsi Peluang, Histogram dan Grafik Fungsi Kumulatif - Sebaran Peluang dan Sebaran Kumulatif Peubah Acak Kontinu - Grafik Fungsi Peluang dan Grafik Fungsi Kumulatif
4.	4 - 5	Sebaran Dua Peubah Acak Diskrit dan Kontinu	- Sebaran peluang gabungan peubah acak diskrit dan kontinu - Sistribusi marginal peubah acak diskrit - Sebaran marginal peubah acak kontinu - Sebaran bersyarat peubah acak diskrit dan kontinu - Kebebasan Stokastik peubah acak diskrit dan kontinu
5.	6	Ekspetasi Satu Peubah Acak Diskrit dan Kontinu	- Mean (rataan) peubah acak diskrit dan kontinu - Ragam (varians) peubah acak diskrit dan kontinu - Sifat-Sifat ekspetasi - Ekspetasi Khusus : mean dan ragam - Sifat-Sifat Ragam
6.	7 - 8	Ekspetasi Dua Peubah Acak Diskrit dan Kontinu	- Ekspetasi gabungan peubah acak diskrit dan kontinu - Ekspetasi bersyarat peubah acak diskrit dan kontinu - Mean (rataan) peubah acak diskrit dan kontinu - Kovarians peubah acak diskrit dan kontinu

			- Ragam (varians) bersyarat peubah acak diskrit dan kontinu - Koefisien korelasi peubah acak diskrit dan kontinu - Akibat kebebasan stokastik
7.	9	Fungsi Pembangkit Momen Satu Peubah Acak	- Pengertian dan konsep momen - Fungsi pembangkit momen pa diskrit - Fungsi pembangkit momen pa kontinu - Pertidaksamaan Chebyshev
8.	10 - 11	Fungsi Pembangkit Momen Dua Peubah Acak	- Fungsi pembangkit momen gabungan pa diskrit - Fungsi pembangkit momen gabungan pa kontinu - Koefisien korelasi peubah acak diskrit dan kontinu
9.	12 - 13	Beberapa Sebaran Khusus Diskrit	- Sebaran Bernoulli - Sebaran Binomial - Sebaran Trinomial - Sebaran Poisson - Sebaran Geometrik - Sebaran Hipergeometrik
10.	14 - 16	Beberapa Sebaran Khusus Kontinu	- Sebaran Seragam - Sebaran Gamma - Sebaran Eksponensial - Sebaran Khi-kuadrat - Sebaran Beta - Sebaran Normal - Sebaran Normal Baku - Sebaran Normal Dua Peubah Acak - Sebaran t dan sebaran F